Progetto ArAl

Percorsi nell'aritmetica per favorire il pensiero pre-algebrico

GLOSSARIO

Additiva (forma, rappresentazione)

Argomentare
Balbettio algebrico
Brioshi

Canonica / non canonica (rappresentazione, forma)

Codifica formale (messa in formula)

Collettivo/a (confronto, discussione)

Composizione di operatori

Computazionale (aspetto)

Condividere → Collettivo/a (confronto, discussione)

Confronto → Collettivo/a (confronto, discussione)

Contratto didattico

Descrivere (in linguaggio matematico)

Diario (delle attività in compresenza)

Discussione → Collettivo/a (confronto, discussione)

Ebbrezza da simbolo

Enunciato

Etichetta (lettera come)

Formale/formalizzazione → tradurre, traduzione

Frase matematica

Ibrida (equazione, scrittura, rappresentazione) → pseudoequazione

Incognita

Indeterminata

Indicatore (lettera come) → Lettera (uso della)

Indicatore di conclusione → Uguale (segno)

Ingenua (scoperta) → Ebbrezza da simbolo

Iniziale (lettera come) → Lettera (uso della)

Leggi di di cancellazione

Lettera (uso della)

Linguaggio (matematica come)

Macchia → Mediatore didattico

Mancanza di chiusura (dell'operazione) → Uguale (segno)

Mediatore didattico

Mediazione sociale → Collettivo/a (confronto, discussione)

Metafora → Mediatore didattico

Moltiplicativa (forma) → Additiva (forma, rappresentazione)

Negoziazione

Nome (del numero) → Canonica / non canonica (rappresentazione, forma)

Additiva (forma, rappresentazione)

2 + 2 + 2 + 2 oppure 5 + 3 sono rappresentazioni *additive* del numero 8, allo stesso modo in cui 2 × 4 ne fornisce una moltiplicativa e 2^3 una *esponenziale*. Le tre forme, nell'ordine, esprimono l'evoluzione del pensiero matematico, e ognuna di esse ingloba culturalmente le precedenti. Anche gli alunni, non necessariamente in base all'età, riproducono questa evoluzione. Spesso si trovano inizialmente più a loro agio con la rappresentazione additiva: è quella più spontanea, più rassicurante, è stata studiata per prima, ha determinato quasi un *imprinting nel pensiero*. Ad esempio: nel corso dell'esperienza con la bilancia (v. Unità 6) accade che gli alunni di quinta elementare, nel costruire le loro prime equazioni, incontrino una situazione nella quale su uno dei piatti ci sono più oggetti uguali di peso sconosciuto. Si nota allora come le rappresentazioni riflettano l'epistemologia dei loro autori (frutto della loro storia personale e delle loro convinzioni):

1) 'insieme di oggetti'	x x x
2) rappresentazione additiva del peso totale	x + x + x
3) rappresentazione moltiplicativa del peso totale	3x

Ma la stessa situazione si presenta anche in un ambiente aritmetico.
Ad esempio, in un problema come
"L'insegnante compera per la sua classe 18 confezioni uguali ognuna delle quali contiene una gomma e un temperamatite aventi lo stesso costo di 1,4 €". Rappresenta la situazione in modo da trovare la spesa"
alcuni alunni ricorrono a rappresentazioni moltiplicative del tipo 1,4 × 2 × 18. Quelli che avviano la rappresentazione additiva 1,4 + 1,4 si trovano di fronte alla difficoltà del necessario inserimento di una parentesi; (1,4 + 1,4) × 18; ma quando questo non avviene la scrittura 1,4 + 1,4 × 18 conduce naturalmente ad un risultato sbagliato (a volte può accadere che lo studente trascuri di scrivere la parentesi - errore sintattico - ma si comporti come se essa ci fosse - correttezza procedurale - e trovi comunque il risultato corretto).

Argomentare

Per argomentazione si intende il fornire argomenti, cioè 'ragioni a favore o contro una determinata tesi' (Argomentazione in Enciclopedia Einaudi) o 'l'atto del formare ragioni, fare induzioni, trarre conclusioni, e applicarle al caso in esame' (Argomentazione in dizionario Webster). La parola argomento sta ad indicare 'ragione o ragioni offerte a favore o contro una proposizione, opinione o misura' (Webster). Argomenti possono essere espressi verbalmente o per iscritto, mediante dati numerici o rappresentazioni grafiche. In una argomentazione vi può essere la presentazione di varie tesi e la loro verifica o confutazione con semplici ragionamenti, con esempi immediati o con prove sperimentali. Si fa uso di argomentazioni nelle attività di tipo euristico, in cui si formulano congetture o si cercano liberamente soluzioni ad un problema attuando una connessione semantica di fatti attraverso cui vengono evidenziate nuove relazioni tra dati oggetti (processo costitutivo della dimostrazione informale). L'argomentare è mezzo fondamentale nel processo di quella costruzione sociale delle conoscenze che dovrebbe essere tipica dell'attività matematica a livello di scuola dell'obbligo.

Balbettio algebrico

È una metafora elaborata all'interno del progetto ArAl che accosta le modalità dell'apprendimento del linguaggio algebrico a quelle del linguaggio naturale. Il bambino, nell'apprendimento del linguaggio naturale si appropria poco alla volta dei suoi *significati* e delle regole che lo supportano, che sviluppa gradualmente attraverso imitazioni, errori, invenzioni, aggiustamenti, gratificazioni sino agli approfondimenti dell'età scolare, quando imparerà a leggere e a riflettere sugli aspetti *grammaticali* e *sintattici* della lingua. Analogamente prefiguriamo debba avvenire per il linguaggio algebrico. La metafora del balbettio si contrappone alla didattica tradizionale dell'algebra nella quale si comincia privilegiando lo studio delle *regole*, come se la manipolazione formale fosse in qualche modo indipendente dalla comprensione dei *significati.* Si propone invece di costruire il pensiero algebrico *progressivamente, parallelamente* all'aritmetica, partendo dai suoi *significati,* attraverso la costruzione di un ambiente che stimoli in modo *informale* l'elaborazione autonoma, sperimentale, continuamente ridefinita, di un nuovo linguaggio nel quale le *regole* possano trovare la loro collocazione altrettanto gradualmente, all'interno di un *contratto didattico tollerante* verso momenti iniziali sintatticamente 'promiscui'.

Brioshi

Brioshi è un alunno giapponese immaginario (di età variabile a seconda dei suoi interlocutori) e costituisce un supporto molto potente all'interno del progetto ArAl (vedi Unità 1). È stato introdotto per avvicinare gli alunni fra i 7 e i 14 anni ad un concetto difficile da far comprendere: la necessità del *rispetto delle regole* nell'uso di un linguaggio, necessità ancora più forte nel caso in cui si incontri un linguaggio formalizzato, e questo in ragione dell'estrema sinteticità dei simboli usati. Brioshi sa comunicare solo attraverso un uso corretto del linguaggio matematico e si diverte a scambiare problemi e soluzioni con classi di altre nazioni servendosi dei mezzi più diversi, dai messaggi su fogli di carta a più sofisticati scambi attraverso un apposito software (Net meeting).

Canonica / non canonica (rappresentazione, forma)

Pensare un numero significa, per chiunque, pensare ad una certa quantità espressa mediante la rappresentazione posizionale in base 10. Se la quantità è minore di dieci essa è rappresentata da una delle cifre 0; 1, …; 9, se è maggiore di dieci essa è rappresentata da una stringa di cifre ciascuna indicanti, da destra a sinistra, rispettivamente il numero delle unità, decine, centinaia, etc, di cui il numero è composto. Questa rappresentazione dà anche nome al numero ad esempio134 si chiama *centotrentaquattro* ed è per questo che è detta *canonica.* Un numero tuttavia può essere rappresentato in una miriade di altri modi, e non solo attraverso un cambiamento della base nella rappresentazione posizionale, ma da una qualsiasi espressione che lo abbia come suo risultato. Ovviamente ogni rappresentazione avrà un suo determinato *senso* proprio del processo soggiacente o dell'ambito numerico di riferimento ad esempio le scritture 2; 2,00; 4/2; +2, $\sqrt{2^2}$, rappresentano tutte il numero 2. La rappresentazione canonica, nome proprio del numero, è *opaca di significati,* nel senso che all'alunno *dice poco di sé*. Per esempio: la scrittura '12' suggerisce un generico 'numero di cose', tutt'al più l'idea di 'parità'. Altre rappresentazioni – adeguate alle età – possono invece ampliare il campo delle informazioni: '3×4' evidenzia che si tratta di un multiplo sia di 3 che di 4; '$2^2 \times 3$', che è anche un multiplo di 2; '$2 \times 2 \times 3$' conduce ''$2 \times$

6' e quindi al multiplo di 6; 36/3 o 60/5 che è sottomultiplo di altri numeri, inserito sotto radice nella forma $\sqrt{2^2 \times 3}$ aiuta a passare a $2\sqrt{3}$, e così via.
Ognuna delle possibili connotazioni di un numero *aggiunge informazioni* utili per un approfondimento della sua conoscenza, in analogia con quanto avviene per le persone. Giancarlo, il papà di Alice, il proprietario del camper tal dei tali, il professore di matematica della terza C, il coordinatore del progetto ArAl, l'amico di Francesco, the Italian speaker, e così via, rappresentano uno stesso soggetto da più punti di vista e ne ampliano la conoscenza rispetto alla 'forma canonica' "Giancarlo Navarra". Vedremo in seguito in un esempio concreto come abituare gli alunni a concepire come 'numero' non solo '12' (suo *nome proprio*) ma anche '9 + 3' o '$2^2 \times 3$' sia un passaggio importante verso la soluzione di certe famiglie di problemi e la comprensione di scritture come 'a + b' o 'x^2y'.

Codifica formale (messa in formula)

È l'atto di traduzione dal linguaggio naturale al linguaggio algebrico di relazioni tra grandezze. Gli aspetti più delicati in tale processo consistono:
(i) nella scelta dei nomi (lettere) da dare alle quantità, note e incognite, che esprimono la misura delle grandezze in gioco;
(ii) nel controllo sulle diverse rappresentazioni attraverso le quali la stessa relazione può essere espressa;
(iii) nei modi in cui le relazioni (e quindi le rappresentazioni) vengono collegate fra loro attraverso la sostituzione o il confronto.
Ad esempio la consegna:
Rappresenta la relazione: il segmento $\overline{AB}$ è maggiore di 4cm del segmento $\overline{CD}$
può essere codificato in modi differenti:
1. $\overline{CD} = \overline{AB} - 4$;
2. $\overline{AB} = \overline{CD} + 4$;
3. $\overline{AB} - \overline{CD} = 4$.

È bene abituare gli allievi al fatto che la bontà di una traduzione dipende dalla sua efficacia nel favorire la sintesi di tutte le relazioni coinvolte. L'attività di messa in formula può comportare difficoltà. Vi sono situazioni in cui la formulazione verbale stessa del quesito induce all'errore, anche perché generalmente gli allievi tendono a fare una traduzione seguendo l'ordine delle parole nel testo. Un esempio classico è il seguente:

> *Scrivi un'equazione per rappresentare la seguente proposizione: 'In questa università ci sono 6 volte tanti studenti quanti professori'. Usa P per il numero di professori e S per il numero di studenti.*

Frequentissima è la traduzione della proposizione in termini di 6S = P al posto di 6P = S. Si parla in questo caso errore di inversione. È bene abituare gli allievi ad effettuare una parafrasi della proposizione da tradurre in modo da controllarne il significato.
Per favorire la messa in formula si possono anche utilizzare testi di problemi da cui si omettono la domanda o le domande conclusive. Inizialmente può essere opportuno indicare agli allievi l'oggetto o gli oggetti a cui dare il nome.
Un'altro ottimo problema è il seguente:

> *Giulia è di 4 anni più giovane di Dora, Elena è di 3 anni più vecchia di Dora. La somma delle loro età è 38. Indica con una lettera gli anni di Dora*

ed esprimi in formula la relazione tra le informazioni date. Esprimi poi la relazione con un'altra formula a partire dagli anni di Giulia.

È tuttavia importante portare gli allievi a comprendere che nell'esprimere una stessa cosa in modi diversi nasce l'uguaglianza tra le scritture.

Collettivo/a (confronto, discussione)

La ricerca internazionale sull'educazione matematica ha ormai evidenziato con certezza che le attività che comportano la verbalizzazione e l'argomentazione favoriscono l'apprendimento della matematica. L'efficacia di queste attività si manifesta attraverso la *scrittura* - e quindi la produzione di protocolli relativi a situazioni problematiche e a consegne opportunamente organizzate – e, in modi altrettanto importanti, attraverso la *discussione*.

Di fatto non esiste *la* discussione, ma possono essere attuati differenti *modelli* di discussione in classe su temi attinenti la matematica, che presuppongono di volta in volta ruoli differenti per l'insegnante che le gestisce. Ad esempio: la discussione attorno alla soluzione collettiva di un problema *(problem-solving discussion),* oppure attorno al confronto fra strategie elaborate dai singoli o dai gruppi per risolvere una situazione problematica *(balance discussion),* oppure attorno a temi generali (*conceptualization discussion* o *phylosophical discussion)* del tipo 'Cosa sono per voi i numeri?' o 'Cos'è la la geometria?'. Quello che conta è che in ogni caso si attivano dinamiche favorevoli all'apprendimento.

Dal punto di vista *sociale* queste attività stimolano la capacità di ascoltare, di confrontarsi, di collaborare, di argomentare, di misurarsi con i propri ostacoli epistemologici: di pervenire cioè ad una costruzione delle conoscenze che sia il risultato di una *mediazione* sociale. Dal punto di vista *cognitivo,* contribuiscono ad affinare capacità *metacognitive* (riflettere sulle proprie conoscenze, sulle differenze spesso sottili fra *sapere* e *capire,* sul rapporto fra padronanza delle tecniche e comprensione delle teorie che supportano le tecniche) e *metalinguistiche* (riflettere sul linguaggio naturale e sui linguaggi della matematica, sulle sintassi e le semantiche peculiari ad ognuno di essi – verbali, iconici, grafici, sagittali – sulle traduzioni fra linguaggio naturale e linguaggio matematico).

La pratica della discussione in 'classi di matematica' non è molto diffusa fra gli insegnanti, spesso diffidenti a causa delle presunte difficoltà di *controllarne le modalità e la durata*. Di fatto la discussione e il confronto collettivi rappresentano a lungo termine un *volan*o potente per competenze sia matematiche che linguistiche. Si può affermare che sia la struttura stessa della pratica didattica che ne viene influenzata, nel senso che il sapere in gioco è più *dinamico,* e gli alunni sono per molti aspetti coinvolti nella sua costruzione. In questo senso esse rappresentano un ambiente pedagogico decisivo nello sviluppo del balbettio algebrico.

Composizione di operatori

Gli operatori si distinguono in additivi '+5', '-3' ed operatori moltiplicativi '×4', ':2'. Il nome deriva dal fatto che essi i riferiscono rispettivamente all'operazione dell'addizione e a quella della moltiplicazione. Componendo operatori additivi nei due sensi si ottiene lo stesso operatore, lo stesso dicasi nella composizione di due operatori moltiplicativi; questo si esprime dicendo che la composizione di operatori additivi è commutativa (rispettivamente è commutativa la composizione di operatori moltiplicativi). In generale, però, componendo due operatori di tipo diverso, ciò non accade. Ad esempio: partendo dallo stesso numero, il 7, ed applicando i due operatori '+2' ':3' nei due ordini possibili, otteniamo due risultati diversi (nel primo caso 3, nel secondo 7/3 +2); dunque, la composizione di operatori qualsiasi non gode della proprietà commutativa. È importante, nel prosieguo degli studi, far comprendere agli allievi che gli operatori sono oggetti che hanno una loro 'aritmetica' rispetto all'operazione di composizione: vale la proprietà associativa, c'è un elemento neutro rispetto alla composizione ed è l'operatore '×1', per ogni operatore c'è l'operatore inverso, ossia l'operatore che, composto nei due sensi con il primo, dà luogo all'operatore '+1'. È delicato da un punto di vista concettuale far comprendere che l'operatore inverso di '+3' è l'operatore '-3' perché per ogni numero n è: (n + 3) - 3 = n ed (n - 3) + 3= n ossia '+3 -3' e '-3 +3' operano su n come l'operatore '1'.

All'interno dell'attività, in particolare nell'Unità 2 *Griglia dei numeri* e nell'Unità 5 *Regolarità,* abbiamo usato operatori di tipo aritmetico. In quel contesto l'operatore è stato interpretato attraverso la metafora del *dare degli ordini* per passare da un numero ad un altro. Gli alunni hanno spontaneamente usato la rappresentazione sagittale per descrivere gli operatori; ad esempio: $2 \xrightarrow{+5} 7$.

Computazionale (aspetto)

Aspetto che, nello studio di una situazione problematica, punta prevalentemente sul *calcolo* trascurando di evidenziare il *processo* di pensiero che lo regola, cosa che ne rende oscura la logica soggiacente. È tipico di una didattica che punti più sul saper *fare di conto* che non sulla consapevolezza delle ragioni che lo legittimano.

Condividere → Collettivo/a (confronto, discussione)

Confronto → Collettivo/a (confronto, discussione)

Contratto didattico

È un costrutto teorico dovuto al matematico francese G. Brousseau (1986) che sta ad indicare l'insieme delle relazioni, in piccola parte esplicite ma in buona parte implicite, che soggiacciono e regolano il rapporto insegnante-allievi di fronte allo sviluppo della conoscenza di uno specifico contenuto matematico. Tali relazioni si risolvono in un sistema di *obblighi,* che nel processo didattico coinvolgono sia insegnante che gli allievi, a cui ciascuno deve assolvere e di cui ha la responsabilità di fronte agli altri (da qui il ricorso al termine *contratto).*

Descrivere (in linguaggio matematico)

La parola *descrivere* indica un'attività con cui, osservando certi enti, ne parliamo, solitamente attraverso il linguaggio naturale. Si può parlare però di *enti* e di *relazioni* tra di essi anche utilizzando il linguaggio della Matematica. In questo caso le parole diventano simboli e anche i predicati si traducono in relazioni tra enti. Come la lingua offre diverse possibilità per descrivere, così anche il linguaggio simbolico, per quanto meno ricco di termini e univoco nei significati, offre a volte più possibilità, e l'allievo deve imparare a riconoscere descrizioni equivalenti. Importanti attività in questo senso si ritrovano ad esempio nell'Unità 1 (Progetto Brioshi).

La frase 'rappresenta quanto manca al numero 6 per arrivare a 9' si può tradurre con:

6 +…= 9 oppure con …= 9 -6 oppure con 9 - …= 6.

Si tratta di parafrasi che dal linguaggio naturale possono essere tradotte anche nel linguaggio aritmetico, e descrivono in vari modi il numero 3 come differenza tra 9 e 6. Per riuscire ad operare su una molteplicità di descrizioni, anche in situazioni così semplici, all'allievo è richiesta una notevole padronanza dei significati delle operazioni aritmetiche fondamentali.

Diario (delle attività in compresenza)

I Diari rappresentano uno strumento fondamentale per l'analisi del processo di insegnamento/apprendimento nel progetto ArAl. Vengono stesi dagli insegnanti di classe durante le attività *in compresenza* con i ricercatori e registrano le attività sperimentali, man mano che vengono proposte, assieme alle discussioni, ai protocolli scritti,alle sorprese, agli errori. Sono rielaborati in veste elettronica dai ricercatori (complessivamente nell'anno scolastico 2000/2001 ne sono stati stesi 143) e sottoposti alla valutazione degli insegnanti sperimentatori; al termine dell'anno scolastico vengono discussi all'interno del GREM e organizzati in forma di Unità da testare nelle classi partecipanti al progetto. Dopo questa verifica le Unità vengono ulteriormente raffinate e arricchite di parti significative estratte dai diari e proposte all'esterno del gruppo di lavoro del progetto ArAl.

Discussione → **Collettivo/a (confronto, discussione)**

Ebbrezza da simbolo

Abbiamo chiamato in questo modo un atteggiamento frequente negli alunni nel primo approccio con l'algebra e che si manifesta in modi diversi, ma che esprime comunque un uso non consapevole delle lettere in matematica. La lettera non è vista come numero, ma come *indicatore* dell'oggetto rappresentato, spesso è *iniziale* del suo nome, come *etichetta* (caso nel quale spesso non è isolata, ma viene inserita in un gruppo di lettere spesso accompagnate da un puntino perché, di fatto, è vista come *abbreviazione)*. Può essere inserita sia al posto di un dato mancante che come simbolo per un dato conosciuto. Per esempio, nell'Unità 6, un problema viene tradotto con l'equazione $a + 70 + 30 = p$ dove a indica correttamente la misura dell'altezza (sconosciuta) di un bambino mentre p quella (nota) del padre; l'equazione corretta sarebbe quindi $a + 70 + 30 = 180$, ma l'alunno si è lasciato prendere la mano dalla *novità* costituita dalla possibilità di usare delle lettere e ha smarrito il controllo del significato della scrittura (facciamo notare per inciso che la lettera entra comunque nello scenario simbolico di alunni anche giovani attraverso, per esempio, le formule in

geometria; probabilmente però in quel caso le lettere sono confinate in una riserva a parte, che si potrebbe definire semanticamente muta).
Questo uso 'sporco' della lettera è però ricco di spunti importanti se viene inserito nel contesto del balbettio algebrico. Da questo punto di vista, essa evidenzia un atteggiamento sperimentale di fondo che, opportunamente stimolato e guidato all'interno di un contratto didattico tollerante verso le scoperte *ingenue* degli alunni e aperto a forme di riflessione collettiva e a valutazioni attente da parte dell'insegnante, può preludere ad un'autentica conquista di significati da parte degli alunni. Ci si colloca in questo senso all'interno della teoria dell'area di sviluppo potenziale di Vygotskij, secondo la quale le funzioni psico-intellettive superiori appaiono due volte nel corso dello sviluppo del bambino: la prima volta nelle attività *collettive, sociali;* la seconda in quelle *individuali*. Ciò che il bambino è in grado di fare oggi con l'aiuto degli adulti (la zona del suo sviluppo potenziale, detta anche 'zona prossimale di sviluppo') lo potrà fare da solo domani. Con il supporto determinante dello sviluppo del linguaggio nel suo passaggio da prevalente mezzo di comunicazione *esterna* a funzione mentale *interna.* La teoria Vygotskijana conclude quindi che l'unico buon insegnamento è quello che *precorre lo sviluppo*.

Enunciato

Il termine indica una frase di senso compiuto in riferimento ad una data situazione. Nell'insegnamento della matematica è bene dare spazio ad attività esplorative che portino gli allievi ad esprimere le loro osservazioni attraverso la messa a punto di enunciati su quanto è stato osservato che siano il più possibile *corretti*, *non ridondanti* da un punto di vista linguistico ed *esaustivi* dal punto di vista delle osservazioni. Gli enunciati, riguardanti congetture formulate in merito alla situazione in esame, possono essere *dimostrabili* oppure no; nel caso che di un enunciato si riesca a dare una *dimostrazione* esso prende il nome di *teorema*.

Etichetta (lettera come)

Spesso gli allievi utilizzano la lettera per indicare la *qualità* di un dato e non la sua *quantità*. Ad esempio nella traduzione della frase 'In un cortile vivono 224 animali fra cani e gatti. Il numero dei gatti è 6 volte quello dei cani' alcuni allievi scrivono $6\ g = 1\ c$ per indicare che *ad ogni gruppo di 6 gatti corrisponde un cane.* In questo caso le lettere *g* e *c* sono indicatrici rispettivamente delle qualità *essere gatto* e *essere cane* più che delle rispettive quantità.

Formale/formalizzazione

→ **Tradurre, traduzione**

Frase matematica

Termine mutuato dalla linguistica come sinonimo di 'scrittura', per indicare una qualsiasi rappresentazione in linguaggio matematico (espressione, equazione, formula, ecc.). Come tale, una frase è dotata di una sua semantica e fa riferimento ad un dizionario di segni e ad una sintassi rispetto alla quale è corretta o meno.

Ibrida (euqazione, scrittura, rappresentazione) → Pseudoequazione

Incognita

È normale che gli alunni incontrino sin dalla seconda elementare frasi aperte che comportano l'individuazione di un elemento mancante in una relazione uguaglianza tra due termini ove uno è espresso attraverso un'operazione. Il simbolo più frequente in questi casi è la *casella* da riempire. Simboli sostitutivi di numeri compaiono quindi molto presto nel consueto panorama matematico della scuola elementare ma gli alunni non agiscono su di essi, li usano come supporti *statici*. Da un altro punto di vista, analizzando i protocolli di insegnanti di scuola elementare partecipanti al progetto ArAl impegnati nella soluzione di problemi algebrici, si è potuto osservare una caratteristica comune a molti di essi: introducono sì dei simboli iconici al posto delle quantità sconosciute, però non come rappresentazioni di quantità incognite, ma come supporto per la *visualizzazione della situazione,* spesso fortemente connotati sul piano espressivo - cesti di fiori, bambini, sacchetti - come una sorta di *rimando semantico*, un promemoria. In questo senso, il simbolo iconico è corredato talvolta dal punto interrogativo e/o da parole complete o abbreviazioni, a rinforzare l'interpretazione precedente della simbolizzazione come *situazione visualizzata*. Inoltre, si tratta di un uso *sporco* dei segni, tant'è vero che talvolta qualcuno di essi cambia nello sviluppo di una procedura, ad ulteriore conferma della loro funzionalità *segnaletica* più che matematica. Insomma: le icone segnano lo *sviluppo* silenzioso del ragionamento del risolutore, e gli servono per tracciare brevi *appunti di viaggio*. I due esempi ci permettono di osservare come conoscenze matematiche non educate alle correlazioni fra aritmetica e algebra, appoggiate per di più a libri di testo altrettanto poveri culturalmente, impediscano di fatto di cogliere opportunità favorevoli anche nella consueta didattica dell'aritmetica. Nella formazione stessa dei docenti l'introduzione della lettera – e in particolare il concetto di 'incognita' – è collocata nel momento dell'incontro con l'Algebra (con la 'A' maiuscola) negli ultimi anni della scuola media, collegata quasi esclusivamente al ricordo di formalismi spesso incomprensibili e totalmente opaca sul piano dei significati. La scoperta ingenua di come si possa rappresentare un numero sconosciuto non rientra nella didattica tradizionale della matematica. Il simbolo letterale viene *consegnato* allo studente quando è grande e, per molti aspetti, quando è ormai troppo tardi.

Nel progetto ArAl, invece, in particolare nel corso della costruzione del linguaggio matematico attraverso forme sempre più evolute di balbettio, la conquista della rappresentazione dell'incognita costituisce il momento della *costruzione del suo significato*. Gli alunni dei primi anni della scuola elementare propongono le loro personali rappresentazioni (icone geometriche, icone fantasiose, disegni espressivi, lettere, caselle, puntini, spazi vuoti, punti interrogativi, e così via) e ne esplorano le potenzialità e la fruibilità attraverso il confronto e la riflessione durante le discussioni collettive. Alcuni simboli si evolvono in modo produttivo, altri scompaiono a causa della loro riconosciuta inadeguatezza. Il mediatore didattico decisivo è rappresentato da Brioshi che *certifica* la trasparenza del simbolo adottato. È molto interessante, nella costruzione lenta del concetto di incognita, soprattutto con gli alunni più giovani, il ruolo di mediatori didattici come la macchia, la nuvola, la mascherina (vedi Unità 4 *Matematòca & altri giochi*).

Indeterminata

È una denominazione antica che affonda le sue radici nel periodo un cui si iniziarono ad utilizzare le lettere nella generalizzazione di situazioni problematiche e a rappresentare attraverso un problema una intera *classe di problemi.* L'idea seguita è consistita nell'oscurare gli specifici valori dei dati indicandoli con una lettera, che veniva cosi a rappresentare un numero qualsiasi, non determinato appunto, *possibile* valore del dato. Un processo risolutivo di un problema veniva rappresentato e riassunto dall'espressione aritmetica associata che diventava - per effetto della sostituzione del valore numerico di un dato con una lettera - risolutiva della intera classe di problemi. L'espressione *aritmetica* diveniva così espressione *algebric*a. Con l'affermarsi dello studio sintattico delle forme algebriche queste vennero classificate in forme con una indeterminata o con più indeterminate. Oggi, con la visione moderna degli ambiti numerici, il termine *indeterminata* è entrato in disuso, ad esso si preferisce il termine *variabile* che sta ad indicare un qualsiasi valore di un elemento in un dato insieme di riferimento. Tentando un parallelo con la lingua italiana potremmo dire che il termine *indeterminata*, usato in riferimento al numero generico, è analogo al termine *ogni*, che centra l'attenzione sull'individuo. Il termine *variabile* invece è analogo al termine *tutti*, che guarda sì all'individuo, ma in riferimento alla *totalità* dell'ambiente cui appartiene.

Indicatore (lettera come) → Lettera (uso della)

Indicatore di conclusione → Uguale (segno)

Ingenua (scoperta) → Ebbrezza da simbolo

Iniziale (lettera come) → Lettera (uso della)

Leggi di cancellazione

Sono leggi aritmetiche che hanno la loro genesi nel principio *Se a cose uguali aggiungiamo o togliamo cose uguali otteniamo cose uguali.* Tali leggi stanno alla base delle leggi di trasformazione delle equazioni (vedi Unità 6 *Dalla bilancia all'equazione*).
La prima legge coinvolge l'addizione (sottrazione):
dati a, b, c numeri naturali, se a + c = b + c (o a - b = a - c) allora a = b.
La seconda legge coinvolge la moltiplicazione (divisione):
dati a, b e c naturali, con c diverso da zero, se a × c = b × c (a : c= b : c) allora a = b.
Ovviamente per ciascuna legge vale anche il viceversa.

Lettera (uso della)

L'incontro con *qualcosa che sta per* un numero avviene precocemente – di fatto, sin dalla scuola elementare - anche in una didattica tradizionale della matematica. I sussidiari riportano nella parte riservata all'aritmetica esercizi con caselle vuote da riempire, punti di domanda, spazi liberi, puntini, senza peraltro che gli autori collochino questi simboli in un contesto attento ad un approccio al pensiero algebrico. In ambito geometrico avviene qualcosa di simile con le formule dei perimetri e delle aree dei parallelogrammi. Comunque sia, si tratta alla fine di situazioni didattiche che rimangono *mute* sul piano educativo e non contribuiscono ad alcuna costruzione di *significati.*

Uno degli aspetti nodali del progetto ArAl è rappresentato proprio dall'incontro con la possibilità di *comunicare* tramite simboli *numerici* e *non numerici* (iconici, grafici, letterali). L'approccio alla lettera avviene all'interno di una graduale incontro con il linguaggio matematico e si trasforma nel corso della progressiva evoluzione del balbettio algebrico all'interno di un contratto didattico tollerante verso un uso iniziale dei simboli 'sporco' e una frequente produzione di pseudoequazioni; è supportato da opportuni mediatori che, attraverso il gioco e l'esperienza concreta, ne favoriscono la comprensione. L'intuizione della lettera in ambito matematico deve essere il frutto finale di una negoziazione collettiva e dipende quindi dalle condizioni ambientali in cui le relative attività vengono svolte. Per esempio, quando gli alunni più giovani cominciano a scambiarsi messaggi con Brioshi, lo spazio *vuoto* in genere è il più 'gettonato' perché sembra far capire meglio «che bisogna che Brioshi scopra il numero». Può accadere anche che, alla fine della discussione su quale sia la rappresentazione migliore da inviare all'amico giapponese, la decisione della classe premi una scrittura iconica rispetto ad una letterale (più evoluta). Questi aspetti sono molto importanti per costruire delle basi semanticamente significative alla costruzione del linguaggio algebrico. Sarà l'affinamento graduale delle valutazioni degli alunni a portare all'individuazione delle traduzioni più corrette.

Accenniamo infine ad alcuni fra gli errori o i misconcetti che più di frequente compaiono nelle produzioni degli alunni (ma anche degli studenti più anziani) quando l'uso della lettera non è supportato da una opportuna semantica:

come *iniziale*: in un problema che parli, ad esempio, di biciclette, se *'b'* è vista come iniziale della parola, può accadere che la scrittura '*4b*' venga interpretata come '*quattro biciclette'* invece che come 'quattro volte *il numero delle biciclette'*.

come *indicatore*: compare anche mescolata a simboli iconici e; spesso questa concezione è associata al fenomeno della persistenza semantica.

come *segnaposto*: svolge una pura funzione segnaletica: sta per l'oggetto e non per il numero. Questo accade per esempio nei problemi risolvibili con un'equazione (vedi Unità 6: *Dalla bilancia all'equazione*): essa rappresenta la *visualizzazione* di un elemento della situazione problematica e non il suo valore numerico, ad esempio: con '*c*' viene indicata la *'confezione di cioccolatin*i' e non '*il numero che rappresenta il peso della confezione'*.

Linguaggio (matematica come)

Il linguaggio simbolico della Matematica è estremamente sintetico e concentra in pochi segni una grande ricchezza di significati. Il passaggio dalla lingua naturale al linguaggio matematico, essenziale nell'apprendimento della matematica, non è immediato, e richiede un lungo esercizio e un'attuazione molto graduale. La lingua naturale è più esplicita, possiede parole che sono sinonimi, una grande ricchezza di interpretazioni si può ottenere attraverso sfumature di significati da attribuire ai termini stessi. Il linguaggio matematico, con tutti i suoi simboli, sempre più sintetico, man mano che si evolve, rappresenta inizialmente un ostacolo alla lettura e alla comprensione. Esso presenta però anche dei vantaggi: il simbolo possiede una universalità che le parole non hanno, anche bambini che parlano lingue diverse possono trovare momenti di condivisione di esperienze comunicative proprio attraverso l'uso del linguaggio matematico (v. Unità 1 Progetto Brioshi). Inoltre il linguaggio simbolico possiede una potenza nello sviluppo del pensiero, che la lingua naturale non ha. Se ad esempio scrivo un generico numero dispari come $2n + 1$, (con n generico numero intero), potrò operare una serie di ragionamenti sulle proprietà dei numeri dispari e sulle relazioni di questi con altri numeri, cosa che la lingua naturale non mi consente. Il linguaggio simbolico diventa così mediatore di messaggi e di significati e svolge un importante ruolo nella comunicazione e nella socializzazione della conoscenza.

Macchia →Mediatore didattico

Mancanza di chiusura (dell'operazione) →Uguale (segno)

Mediatore didattico

Vengono chiamati *mediatori didattici* tutti quegli strumenti che aiutano l'alunno nei momenti spesso difficili in cui si accosta a nuove conoscenze. In molti casi sono (o dovrebbero essere) un frutto spontaneo della creatività dell'insegnante, e sono comunque parte integrante di un qualsiasi processo educativo. Il ruolo del mediatore è quello di *traghettare* da un campo d'esperienza familiare ad uno sconosciuto attraverso l'esplorazione di elementi percepibili come *comun*i sia alla situazione di partenza che a quella d'arrivo. Ad esempio, nel progetto ArAl, importanti elementi di mediazione sono:
l'analogia con situazioni tipiche del *linguaggio naturale* (ad esempio la molteplicità di rappresentazioni con cui un numero può essere denotato al di là di quella canonica, così come ciascun individuo può essere denotato, oltre che dal nome proprio, da una miriade di locuzioni che tengono conto delle relazioni di parentela, amicizia, lavoro, etc in cui è coinvolto) (vedi in particolare l'Unità 1: *Progetto Brioshi*);
il ricorso alle *mascherine* per una attività sull'aspetti relazionali del numero (vedi Unità 4: *Matematòca & altri giochi*);
la *macchia* o la *nuvola* come strategia per congetturare cosa si nasconde dietro un breve testo matematico e per indurre il passaggio all'uso delle lettere (vedi Unità 3: *Piramidi di numeri* e Unità 4: Matematòca & altri giochi);
l'*isola*, l'*arcipelago*, il *viaggio* come elementi di giochi esplorativi nell'ambito di griglie numeriche strutturate per favorire la rappresentazione sintetica di catene di operatori additivi o anche per introdurre in modo ingenuo il concetto di indeterminata (vedi Unità 2: *La griglia dei numeri*);
la *bilancia* come strumento per l'approccio all'equazione (vedi Unità 6: *Dalla bilancia all'equazione*).
Un mediatore, quanto più è significativo, tanto più è *potent*e; allo stesso tempo, però, è opportuno tenere presenti anche i suoi *limiti*, nascosti proprio nella sua potenziale efficacia. Ne poniamo in evidenza due.
La ricerca mostra come sia possibile che si verifichino delle *interferenze* fra le caratteristiche intrinseche del mediatore e quelle che esso acquisisce quando entra a far parte di una metafora. Ad esempio nell' Unità 5: *La regolarità: fregi e collane*, nell'usare lo *stampino* (o *timbro*) di una *cornice* (noti all'alunno sin dalla scuola materna) come mediatori per far comprendere il *modulo* di una *successione,* di fatto con questi quattro elementi impostiamo una 'proporzione': *il timbro sta alla cornice come il modulo sta alla successione*. Ma, per poter divenire parte attiva della metafora, il timbro e la relativa cornice devono in qualche modo *perdere* le loro caratteristiche originali, per poter divenire *ponte* verso una nuova conoscenza (il concetto di regolarità di una successione). Fintantoché questa necessaria *ristrutturazione del campo* non avviene, i mediatori possono anche finire per svolgere il ruolo di distrattori e opacizzare quindi le potenzialità della metafora come strumento di conoscenza. Nell'esempio riportato le caratteristiche della cornice - legate all'aspetto estetico, e quindi al piacere di progettare un oggetto concreto e alla sensazione di poter giocare liberamente con la propria fantasia e la propria creatività - possono indurre negli alunni (soprattutto, ma non solo,

nei più giovani, come testimoniano alcuni diari) una concentrazione eccessiva sugli aspetti *concreti* del mediatore a scapito di quelli *concettuali* che esso avrebbe dovuto veicolare.
Il secondo aspetto, collegato al precedente, può manifestarsi, ad esempio, nel lavorare con uno strumento come la bilancia e con le rappresentazioni ad esso collegate (vedi Unità 6). Si è visto come, mantenendo un contatto eccessivamente prolungato con il mediatore, l'insegnante rischi di condizionare gli alunni e di condurli ad un uso rassicurante per loro dell'oggetto concreto, che però li blocca nell'evoluzione sia del pensiero che del linguaggio. Il mediatore, in altre parole, rischia di divenire un blocco o di trasformarsi in uno *stereotipo*. Per molti aspetti queste considerazioni sono analoghe a quelle sviluppate a proposito della persistenza semantica.
In conclusione: la metafora può essere utile come provvisorio strumento pedagogico per amplificare schemi pre-esistenti fornendo loro collegamenti semantici fra una conoscenza strutturata e informazioni nuove. Si invita a ricorrere quindi all'efficacia di mediatori e metafore, quando se ne presenti l'occasione o la necessità, e all'occorrenza anche di riutilizzarli a distanza di tempo, ma di staccarsene comunque quanto prima per non creare stereotipi negli allievi attraverso un'enfasi eccessiva data a tale supporto, non appena si comprenda che essi hanno consentito di raggiungere lo scopo per il quale erano stati introdotti.

Mediazione sociale

→ **Collettivo/a (confronto discussione)**

Metafora

→ **Mediatore didattico**

Moltiplicativa (forma)

→ **Additiva (forma, rappresentazione)**

Negoziazione

Processo tipico della discussione di classe in cui l'insegnante coordina e guida gli allievi verso una condivisione ed un accordo sui significati matematici emersi dalle esplorazioni effettuate, attivando una riflessione sulla pertinenza delle argomentazioni svolte o delle rappresentazioni espresse.

Nome (del numero)

→ **Canonica / non canonica (rappresentazione, forma)**

Opaco / trasparente (rispetto al significato)

Una rappresentazione in linguaggio matematico è composta da simboli che comunicano dei significati la cui comprensione dipende sia dalla capacità di colui che la interpreta che dalla rappresentazione *in sé.* Consideriamo la forma canonica di un numero: si può dire che sia più *povera* di significati delle sue infinite possibili forme non canoniche; ad esempio, la forma non canonica $2^3 \times 3^4 \times 5^2$ dà più informazioni sui divisori del numero 16200 che non la sua forma canonica (16200). Un altro esempio: la tendenza ad effettuare immediatamente il calcolo $2^2 \times 2^5 \times 2^3$ (probabilmente con l'uso della calcolatrice), porta sì ad un risultato corretto rappresentato nella sua forma canonica (1024), ma fa perdere l'efficacia data dalla rappresentazione del passaggio 'intermedio' 2^{2+5+3}, necessario per costruire la comprensione del perché, in campo algebrico, $ab^2 \times a^3b^4 = a^4b^6$. Si può quindi parlare di una maggiore *opacità* per scritture come 16200 e 1024, di una maggiore *trasparenza* per quelle come $2^2 \times 2^5 \times 2^3$ e a 2^{2+5+3}. In generale, la trasparenza favorisce la comprensione del *processo*, cioè delle modalità attraverso le quali si è raggiunto un certo *prodotto,* in quanto evidenzia le strategie adottate, i possibili errori, gli eventuali misconcetti soggiacenti alla soluzione di quel determinato problema. La dicotomia opaco / trasparente rappresenta uno dei nodi attraverso i quali si sviluppa il progetto Brioshi (Unità 1).

Operatore direzionale →Uguale (segno)

Parafrasi

In linguistica la parafrasi è la riformulazione del significato di una parola o di una frase con l'intento di rendere più chiara l'espressione parafrasata. La ricerca nell'ambito dell'educazione matematica ha posto in evidenza con crescente forza le relazioni fra la capacità di parafrasare correttamente un testo e quella di tradurlo algebricamente in modo corretto. Naturalmente il presupposto è che la parafrasi lasci *inalterato* il senso della frase e aiuti ad individuare la sua *struttura logica*, quella che consentirà, una volta compresa, di avviare il processo di rappresentazione della situazione problematica attraverso una traduzione fra linguaggi. Il ruolo della parafrasi è fondamentale quando si affronta la matematica come linguaggio, soprattutto perché la parafrasi impone di *redistribuire* i componenti della frase originale mantenendo (o addirittura esaltando) le *relazioni* che li collegano. Si può dire che la traduzione in linguaggio algebrico di una situazione problematica sia *la descrizione degli aspetti relazionali tra le informazioni che essa contiene.* La frase 'il numero dei gatti è doppio di quello dei cani' richiede che l'alunno sappia parafrasare la seconda parte in 'è uguale al numero dei cani moltiplicato per 2'; questo gli facilita l'individuazione della traduzione corretta 'g = c × 2'. Un alunno di prima media ha invece tradotto alla lettera, come fanno di solito i cattivi traduttori: 'gatti = d. di c.'. È evidente, fra le tante considerazioni che si possono fare su questa traduzione, che mentre 'c × 2' mostra l'avvenuto passaggio da un linguaggio (naturale) ad un altro (algebrico), 'd. di c.' è una sorta di linguaggio stenografico personale che mostra non solo che l'autore è rimasto *all'interno* del medesimo linguaggio (naturale), ma che non possiede neppure l'idea di *universalità* (e quindi di comprensibilità) proprio di un linguaggio formale. All'estremo opposto potremmo collocare un'altra rappresentazione: 'g/c = 2' che mostra come l'autore abbia colto una relazione più *nascosta*, e cioè il rapporto fra i due numeri. Va da sé che gli alunni non attivano spontaneamente la strategia di parafrasare il testo, che rimane spesso un'attitudine spontanea di cui gli autori sono spesso del tutto inconsapevoli. Favorire la produzione di parafrasi non è legata tanto ad un incremento di competenze in questo senso, quanto di condurre l'alunno a riflettere sull'efficacia di queste competenze al fine di acquisire delle *chiavi di lettura algebrica* di situazioni problematiche. Il personaggio di Brioshi e l'Unità 1 sono finalizzati a questo scopo.

Persistenza semantica

Abbiamo chiamato in questo modo un fraintendimento legato all'uso dei simboli nel linguaggio matematico, frequente nelle fasi iniziali della costruzione del linguaggio algebrico. Si manifesta soprattutto (per esempio in attività di approccio all'equazione, Unità 6) quando gli alunni si 'affezionano' a simboli iconici per rappresentare quantità sconosciute in situazioni problematiche nelle quali compaiono scatole, bustine, cassette, confezioni, pacchetti, e così via (nomi assimilabili a quelli che in linguistica sono definiti *collettivi).* Il simbolo (rettangolare o quadrato) viene introdotto spontaneamente dagli alunni, *sembra* un passo verso l'astrazione, ma in realtà conserva in sé la *memoria* forte dell'analogia tra la sua *forma* e quella dell'oggetto rappresentato. Così di volta in volta l'icona rettangolare finisce per rappresentare per l'alunno 'la bustina' e non 'il numero delle figurine in essa contenute', 'la cassetta' e non 'il numero dei chilogrammi della frutta contenuta nella cassetta', 'la confezione' e non 'il peso delle noccioline contenute nella confezione'. Questo persistente significato *originale* rischia di sfuggire ad un'analisi 'tradizionale' dei protocolli degli alunni e di favorire un misconcetto forte nel passaggio all'incognita. Anche l'uso delle lettere può portare ad un fraintendimento simile (la lettera come *iniziale della parola* come ad esempio 'c' per 'confezione' invece che per 'numero di.oggetti contenuti nella confezione'), ma sembra più facilmente superabile.

Pre-algebrico (pensiero)

Il progetto ArAl si colloca all'interno di quella cornice teorica che assume la denominazione di *early algebra* (avvio precoce al pensiero algebrico): in esso si sostiene che *i principali ostacoli cognitivi si collochino in campo pre-algebrico, e che molti di essi nascano in modi insospettabili in contesti aritmetici e pongano in seguito ostacoli concettuali spesso insormontabili allo sviluppo del pensiero algebrico*. Numerosi fra gli studi più recenti in campo internazionale sulla didattica dell'algebra mostrano come gli studenti difettino di appropriate strutture *aritmetiche* dalle quali generalizzare e come, senza la consapevolezza delle procedure in aritmetica e del modo in cui esse nascono, non possiedano una base concettuale sulla quale costruire le loro conoscenze algebriche.

Principio di economia

È importante abituare gli allievi all'idea che la matematica mira a *unificare lo studio di situazioni analoghe in modo da risolverle unitariamente*. Un esempio di ciò ci viene dalla storia della matematica: l'introduzione delle lettere per rappresentare i valori dei dati di un problema ha portato a unificare problemi con valori dei dati diversi ma *strutturalmente analoghi* e si è arrivati alla genesi delle espressioni algebriche come *sintesi* del processo risolutivo di ognuno di essi.

Procedura

Scrittura formale in cui compare una sequenza ordinata di istruzioni, codificate in un determinato linguaggio. Ad esempio un'espressione aritmetica, contenente simboli e numeri, è una procedura espressa nel linguaggio dell'Aritmetica. Nel leggere e comprendere la procedura è molto importante l'interpretazione dei simboli al fine di comprendere l'ordine con cui le istruzioni vanno eseguite.

Procedurale

È un attributo che esprime il carattere di *procedura* da eseguire o analizzare. Si usa anche con il significato di sequenziale, in riferimento alla lettura ed interpretazione locale di un testo scritto, in contrapposizione a relazionale, frutto di una lettura globale del testo.

Processo / prodotto

È, assieme a rappresentare / risolvere, una delle dualità fondamentali nell'impostazione teorica del Progetto ArAl. La rappresentazione del *processo* mette in luce le relazioni fra gli enti in gioco, ne costituisce una traduzione in linguaggio matematico. Il *prodotto* è l'atto finale del processo, e spesso la sua sinteticità lascia intendere ben poco del modo in cui esso è stato raggiunto. Questa dualità è così collegata ad un'altra dualità che vede la trasparenza del processo contrapposta all'opacità del prodotto. Le due componenti sono comunque, in matematica, aspetti della stessa medaglia; 8 × 2 + 5, ad esempio, può essere concepito sia come processo di calcolo che come numero. È importante che gli alunni capiscano che esistono questi due punti di vista e imparino a distinguerli. Molto spesso invece essi trovano poco spazio nella didattica tradizionale della matematica, e l'attenzione dei docenti è rivolta soprattutto agli aspetti operativi, *risolutori* di un problema, legati alle *operazioni* e al *risultato*. Trascurare gli aspetti concettuali legati al processo significa perdere una delle occasioni più significative per favorire lo sviluppo del pensiero algebrico. Per esempio, portare gradualmente gli alunni a vedere la scrittura n × 2 + 1:

in una concezione relazionale come *somma fra il prodotto di n con 2 e 1* esprimente ad un livello interpretativo *meta* la proprietà dell'essere dispari del numero che rappresenta;

verso la concezione strutturale, come *oggetto* matematico, ossia come espressione algebrica formale;

a livello più evoluto, come esempio di una classe particolare di funzioni: le funzioni (polinomiali) lineari.

Da un punto di vista didattico, ci sembra interessante proporre una situazione che si rivela efficace sia con gli alunni che con gli adulti per far intuire questa dualità. Ci riferiamo al divertente film d'animazione *Galline in fuga*. La terribile proprietaria di un pollaio-lager è scontenta della bassa produzione di uova e decide di convertire la sua impresa. Acquista una enorme macchina (si immaginino tre container in fila); ad una estremità si infila una *gallina* viva e dall'altra esce una macabra confezione di *pasticcio di gallina*. Al culmine del dramma la gallina protagonista viene infilata nella macchina e il galletto eroe della storia ci si infila a sua volta nel tentativo di salvarla. Seguono cinque minuti esilaranti nei quali si vede cosa accade ai due all'interno dell'orribile macchina (spennamenti, salse, verdure di contorno, cottura e così via). La conclusione dell'esempio è evidente: lo spettatore ha avuto prima l'occasione di vedere il *prodotto* (senza sapere come veniva ottenuto), poi di assistere allo sviluppo del *processo* (interrotto, per la buona sorte dei nostri).

Protocollo

È un termine ormai molto diffuso – mutuato dalla ricerca in didattica della matematica - col quale si indica la produzione scritta di uno studente in relazione ad una determinata consegna. Il riferimento vagamente notarile trae la sua origine probabilmente dal fatto che nel protocollo lo studente *registra* ragionamenti, procedure, ipotesi attraverso i quali illustra la sua risposta. Va sottolineato però che un protocollo può essere più o meno significativo a seconda non solo delle capacità e delle conoscenze dell'alunno, ma anche della *natura della consegna* e delle caratteristiche del *contratto didattico* soggiacente. Consegne abitualmente puntate alla verifica di abilità (ricerca di *risultati*, applicazione di algoritmi, come per esempio: risolvere un'espressione o un'equazione o applicare una formula di geometria piana) abituano gli alunni a redigere protocolli che in genere si rivelano non particolarmente interessanti sul piano dell'interpretazione.

Consegne di tipo *metacognitivo* (legate al dover *argomentare* la risposta) conducono invece a protocolli più significativi in relazione sia ai *progetti* (e quindi alle convinzioni, alle difficoltà, al controllo delle conoscenze) degli autori che alle *aspettative* degli insegnanti.

Pseudo equazione Falcão

Assieme ad *equazione ibrida*, è un termine coniato dal ricercatore J. T. Da Rocha Falcão per indicare i modi nei quali alunni di 8 – 10 anni non ancora introdotti all’algebra risolvono dei problemi algebrici grazie alle suggestioni indotte da una preventiva rappresentazione che può essere spontanea oppure - più frequentemente – opportunamente indotta dall’insegnante. La soluzione del problema è ottenuta attraverso l'elaborazione di *equazioni ibride,* nelle quali coesistono linguaggio naturale, linguaggio iconico e operatori formali matematici. Naturalmente le pre-equazioni non vengono manipolate dagli alunni in modo algebrico, in quanto il loro scopo è di servire soltanto da guida nell'individuazione delle operazioni aritmetiche da eseguire.
La pseudo equazione è il risultato di un’impostazione metodologica che abitua prima a *rappresentare il problema, e poi a risolverlo*. Questi ricercatori hanno mostrato come questi atteggiamenti si riscontrino anche in alunni molto giovani (6 - 7 anni) collocabili, di fatto, nella *zona di sviluppo prossimale* relativamente alla rappresentazione algebrica, in cui le indicazioni e i suggerimenti provenienti dall'insegnante giocano un ruolo importante nell'attribuzione di senso all'algebra e nell'individuazione di strategie di soluzione di problemi.
In conclusione: anche queste ricerche consolidano l’ipotesi che un lavoro importante per favorire il pensiero pre-algebrico possa essere iniziato molto prima di quanto non accada tradizionalmente con allievi di 12 - 13 anni, a condizione che si predisponga nella classe durante le attività di matematica un contesto socio-culturale in cui possano essere esplorati i principali aspetti dei campi concettuali dell'algebra.

Rappresentare / risolvere

È una delle dualità principali nel quadro teorico del progetto ArAl. Risolvere un problema significa puntare all’individuazione del prodotto, cioè delle operazioni che consentono di individuare un risultato. Rappresentare un problema significa puntare all’individuazione del processo, cioè delle scritture che consentono di esplicitare in linguaggio matematico le relazioni fra gli elementi del problema. Nel primo caso si privilegia il punto di vista procedurale, nel secondo quello relazionale.
Questo è un concetto basilare per comprendere il passaggio da un modo di pensare aritmetico ad un modo di pensare algebrico ed è presente in tutte le Unità (in particolare nell’Unità 1: Progetto Brioshi e nell’Unità 6: Dalla bilancia all’equazione); i testi dei problemi che vi compaiono hanno costantemente in evidenza la consegna ‘Rappresenta’ spesso accompagnata dalla specificazione ‘per Brioshi’, proprio per sottolineare che il problema va tradotto in linguaggio matematico e che deve essere allontanata la preoccupazione della ricerca di operazioni. Una concentrazione eccessiva da parte dell’insegnante su certe modalità di risoluzione dei problemi (per esempio l’utilizzo del diagramma a blocchi o di una rigida elencazione delle operazioni) può determinare negli alunni il consolidamento dello stereotipo che ‘risolvere un problema significa fare operazioni’. Per altro, spesso gli stessi libri di testo inducono

questo misconcetto (per esempio quando classificano i problemi in 'a due operazioni', 'a tre operazioni' e così via).
Data l'importanza generale di questi temi, se ne consiglia l'approfondimento attraverso la lettura del Quadro Teorico di riferimento del progetto ArAl.

Rappresentazione

I concetti matematici nascono da astrazioni, seppure attraverso *esperienze percettive*. Tuttavia, per fondarli - anche a livello elementare - è necessario fare uso di *strumenti rappresentativi*. Le rappresentazioni in matematica hanno dunque una funzione esplicativa e chiarificatrice nella costruzione dei concetti.
Esistono rappresentazioni *interne*, che corrispondono alle immagini mentali intorno alle quali si formano e si articolano i concetti, ma perché quelle interne si formino, un ruolo importantissimo hanno anche le rappresentazioni *esterne.* Per rappresentazioni esterne intendiamo l'insieme delle forme rappresentative di ogni genere (linguistiche, grafiche, iconiche, ecc.) delle quali ci serviamo per mediare i concetti matematici.
Ovviamente, la prima e più importante rappresentazione esterna passa attraverso il linguaggio naturale. Il processo stesso di esplicitazione delle esperienze matematiche ha, nel linguaggio naturale, una funzione chiarificatrice e svolge un ruolo fondamentale ai fini della comprensione. Spesso però il linguaggio naturale è insufficiente o inadeguato. Il linguaggio grafico o quello simbolico assolvono ad una funzione sintetica, ma potente ed efficace per completare o ampliare la costruzione corretta di un concetto matematico. Nell'insegnamento della matematica è estremamente importante utilizzare e far sì che - di conseguenza - anche gli allievi utilizzino autonomamente una molteplicità di rappresentazioni nell'ambito di un campo di esperienza, o di uno stesso concetto. Secondo gli autorevoli studi del semiologo francese R. Duval una reale interiorizzazione dei concetti si ottiene solo quando l'allievo riesce ad utilizzare e a coordinare, passando dall'una all'altra, più forme rappresentative per uno stesso concetto. Esemplificazioni immediate di ciò si possono avere se pensiamo alle varie modalità di rappresentazione che ci consentono di illustrare l'ordinamento dei numeri naturali, oppure delle varie forme di utilizzo del metodo delle coordinate e del piano cartesiano per illustrare relazioni tra i più svariati enti.

Rappresentazione polinomiale (di un numero)

Il sistema di numerazione posizionale consente di scrivere infiniti numeri utilizzando un numero finito di cifre. La base che si usa normalmente è la base 10, che utilizza le cifre da 0 a 9, e permette di scrivere un numero come somma di potenze di 10. Così, ad esempio: 327 è forma abbreviata della quantità $3\cdot100 + 2\cdot10 + 7\cdot1 = 3\cdot10^2 + 2\cdot10^1 + 7\cdot10^0$. Questa scrittura del numero 327 costituisce la sua *forma polinomiale*.
L'uso della base 10 è convenzionale: si può utilizzare qualsiasi base, e cambia di conseguenza il numero delle cifre utilizzate. Ad esempio, in base cinque si può scrivere:
$1203_{cinque} = 1\cdot5^3 + 2\cdot5^2 + 0\cdot5^1 + 3\cdot5^0$
Anche in questo caso il numero è espresso in forma polinomiale.
Nell'Unità 2 (La griglia dei numeri) la scrittura polinomiale di un numero di due cifre in base 10 consente di individuare la sua posizione all'interno della griglia, sia lavorando in base 10 con una griglia 10 × 10, sia modificando la base di numerazione e le dimensioni della griglia.

Regolarità

Nelle unità del progetto ArAl è costantemente presente una ricerca di *regolarità*; in particolare nell'Unità 2 (*La griglia dei numeri*) e nell'Unità 3 (*Piramidi di numeri*). L'intera Unità 5 ruota attorno a questo tema. Le attività nelle quali bisogna scoprire le regolarità di una struttura sono preziose per la formazione del pensiero algebrico in quanto favoriscono il passaggio alla generalizzazione: far cogliere una situazione di regolarità significa insegnare ad individuare la chiave di lettura algebrica della struttura considerata. Ricercare regolarità può dare molte informazioni all'insegnante: consente di capire se gli alunni sanno affrontare con metodo e sistematicità le situazioni problematiche, se sanno esprimersi con linguaggio appropriato (utilizzando anche le formule), se sanno fare previsioni e verificarne la validità.

Relazionale (pensiero, lettura, aspetto)

Si parla di *lettura relazionale* di una frase del linguaggio matematico quando l'attenzione è puntata non tanto sugli enti in gioco, quanto sul tipo di relazione esistente tra essi. La lettura di un'equazione, ad esempio, costituisce un momento importante per una visione relazionale delle scritture (v. Unità 6; *Dalla bilancia all'equazione*). Consideriamo i due seguenti problemi:

Su un piatto della bilancia in equilibrio ci sono un pacchetto di caramelle e un peso da 30 g. Sull'altro c'è un peso di 180 g. Quanto pesa il pacchetto di caramelle?

Alvise sale su uno sgabello alto 30 cm. In questo modo è alto come suo padre, che ha una statura di 180 cm. Quanto è alto Alvise?

Entrambi, pur così diversi, sono risolti dalla stessa equazione:
$x + 30 = 180$.
Non solo la risoluzione non appare legata alla natura degli enti in gioco (in questo caso pesi e altezze) ma, soprattutto, ciò che consente di determinare il valore della lettera incognita *x* è la *relazione di uguaglianza* che è stata scritta. Cogliere le relazioni separatamente non sarebbe sufficiente. La stessa scrittura, privata del segno di uguaglianza, non basterebbe a determinare la soluzione dei due problemi.
Molto spesso le scritture contenenti uguaglianze o disuguaglianze sono lette nel verso procedurale, cioè da sinistra verso destra. Per esempio: $3 + 2 < 5 + 2$ è vista come '*3 più 2 è minore di 5 più 2*', oppure $4 + 5 = 9$ come '*4 più 5 è uguale a 9*'. È importante non abituare gli alunni a tale fissità, e portarli invece ad una lettura delle relazioni anche nell'altro verso: '*5 più 2 è maggiore di 3 più 2*' e '*9 è uguale a 4 più 5*'.
La scrittura di un numero naturale come prodotto di numeri primi è un altro esempio: nella scrittura $40 = 2^3 \times 5$ non solo compaiono tutti i divisori di 40 ma, attraverso l'analisi delle relazioni intercorrenti fra di essi, si può stabilire se esso è multiplo o divisore di altri numeri; la sua rappresentazione canonica (40) non fornisce questa ricchezza di informazioni. Nelle unità del progetto ArAl si trovano svariate situazioni in cui uno stesso numero è espresso in diverse forme additive o moltiplicative: l'identificare scritture come 3×2, $4 + 1$, $5 + 0$, costituisce per un alunno un importante passo verso una visione relazionale dei numeri, anche in ambito elementare.

Relazione

Una relazione in matematica esprime un *legame* tra enti. Nella lingua naturale sono i predicati a svolgere questo ruolo; ad esempio, nella frase 'Mario è figlio di Francesco', tale legame è specificato dalle parole 'è figlio di'. Naturalmente, nel linguaggio matematico, la definizione di *relazione,* e le modalità rappresentative con cui la si esprime, hanno una loro specificità. Le relazioni sono complesse da analizzare sia per la *molteplicità di significati affini*, sia per la molteplicità delle rappresentazioni utilizzabili.
Ad esempio, una relazione può esprimere un legame fra *elementi dello stesso insieme* (quindi tra enti della stessa natura: numeri dello stesso tipo, figure geometriche, ecc.) oppure fra *enti caratterizzanti due insiemi diversi*. Nel primo caso, le relazioni definite in un insieme assumono un interesse particolare quando godono di certe proprietà, soprattutto quando risultano essere relazioni d'ordine o di equivalenza, e quindi ingenerano un particolare criterio per enumerare o identificare alcuni elementi dell'insieme considerato (vedi Relazione di equivalenza). Nel secondo caso, quando definiscono il legame tra enti di natura diversa, possono avere la caratteristica di *funzioni*, e quindi dare spazio ad altre interpretazioni di questo legame in ambiti diversi della matematica (ad esempio nell'interpretazione grafica di una relazione di tipo *funzionale*).
Nelle unità del progetto ArAl esistono numerose situazioni in cui gli allievi sono stimolati ad *individuare relazioni* e a *descriverle* (sono molto frequenti, ad esempio, relazioni definite nell'insieme dei numeri naturali: relazioni di tipo additivo, moltiplicativo, di divisibilità tra interi, ecc.). L'aspetto funzionale può essere ravvisato anche quando si parla di successioni; ogni termine, infatti, è il corrispondente del numero naturale che ne indica il posto. Più in generale, l'aspetto funzionale si trova in tutte quelle situazioni nelle quali ad un ente matematico si abbina un unico corrispondente (per esempio un quadrilatero e la sua area).
Le relazioni vengono presentate in vari registri di rappresentazione: si utilizzano rappresentazioni verbali, sagittali (con grafi e frecce che indicano la corrispondenza), tabelle a doppia entrata, ecc. Ciò costituisce una ricchezza del concetto di relazione: didatticamente è importante sfruttare tale ricchezza *stimolando e analizzando diverse rappresentazioni della stessa relazione*. Ciò contribuisce in maniera significativa alla migliore concettualizzazione di un strumento culturale così pervasivo e unificante dell'intera disciplina matematica.

Relazione di equivalenza

La riflessione sull'uguaglianza, in particolare sull'interpretazione che gli alunni danno del segno di uguale come operatore direzionale, impone una riflessione sul significato, sulle proprietà e sull'uso delle relazioni di equivalenza. Le relazioni in un insieme possono godere di alcune proprietà; quelle che chiamiamo 'di equivalenza', in particolare, godono delle seguenti tre:

- proprietà riflessiva: ogni elemento dell'insieme è in relazione con sé stesso;
- proprietà simmetrica: se un elemento a è in relazione con un elemento b allora anche l'elemento b è in relazione con l'elemento a;
- proprietà transitiva: se un elemento a è in relazione con un elemento b, e l'elemento b è in relazione con un elemento c, allora anche a è in relazione con c.

Sono esempi di relazioni di equivalenza in un insieme di persone: l'avere la stessa altezza, l'avere lo stesso peso, l'avere lo stesso nome, l'essere nati nello stesso anno. L'importanza delle relazioni di equivalenza risiede nel fatto che esse stanno alla base dell'uguaglianza, che di fatto risulta essere sempre una uguaglianza relativa a qualche carattere (nel caso degli esempi: uguaglianza in altezza, in peso, in anno di nascita). In una relazione d'equivalenza elementi tra loro in relazione sono detti equivalenti e possono essere identificati rispetto alla proprietà caratteristica della relazione. In molte nostre unità si è operato nell'insieme delle espressioni di numeri naturali e si sono identificate quelle con lo stesso risultato; questo può considerarsi prototipo di tutte le espressioni equivalenti, ciascuna delle quali tuttavia è un legittimo rappresentante di questo.

Risolvere / rappresentare → Rappresentare / risolvere

Risultato → Processo / prodotto

Sagittale (rappresentazione)

Si parla di rappresentazione sagittale quando vengono utilizzate le *frecce*.
Tale genere di rappresentazione si è molto diffusa con l'introduzione dell'insiemistica e solitamente viene utilizzata per rappresentare corrispondenze di un insieme in un altro. Ad esempio: considerato un insieme di *bambini* e uno di *nomi*, la freccia con su scritto 'ad ogni bambino il proprio nome' rappresenta *l'insieme delle coppie che verificano la corrispondenza* in questione. Questo accade anche per corrispondenze in uno stesso insieme, ad esempio: la corrispondenza dell'insieme dei naturali in sé che ad ogni numero fa corrispondere il suo triplo - il cosiddetto *operatore moltiplicativo ×3* - viene rappresentato da una freccia con su scritto '×*3*', rappresentazione che indica l'azione che si compie sul numero. Analogamente per gli *operatori additivi*, ad esempio: '+5' è l'operatore che ad ogni numero associa la somma del numero stesso con 5.
L'uso della rappresentazione sagittale per gli operatori additivi e moltiplicativi consente di visualizzare la loro composizione, che associa ad ogni numero quello ottenuto operando su di esso con i due operatori in successione. Ad esempio: due frecce che si susseguono, rappresentanti rispettivamente gli operatori '+5' e '×2', evidenziano la corrispondenza, loro composizione, che associa ad ogni numero quello che risulta applicandoli di seguito.
La rappresentazione sagittale consente, oltre che di evidenziare tale composizione, di passare in modo tacito dall'aritmetica dei numeri ad un'altra di livello superiore i cui oggetti sono gli *operatori*. In questa nuova aritmetica ogni operatore, essendo *reversibile*, viene ad avere un *simmetrico*, ossia un operatore che agisce disfacendo ciò che il primo compie, facendo sì che la composizione di entrambi lasci tutto *invariato*. Ad esempio: l'operatore '+5' ha come simmetrico '-5', l'operatore '×7' ha come simmetrico ':7'.
In questo quadro l'uso delle frecce si presta molto bene ad analizzare un processo di calcolo nei singoli passi che lo compongono. Ad esempio l'espressione [(3 + 2) × 5 – 3] : 2 che ha come risultato 11 può vedersi come l'azione sul numero 3 della catena di operatori '+ 2', '× 5', '- 3', ': 2'. Essendo ciascun operatore reversibile questo ci permette di dire che agendo sul numero 11 con la composizione dei simmetrici in senso inverso, ossia applicando ad 11 la catena '× 2', '+ 3', ': 5', '- 2', si ottiene 3 (il risultato dell'espressione (11 × 2 + 3) : 5 - 2 è infatti 3). Questa visione diviene immediata per gli allievi se supportata dalla rappresentazione sagittale.
Essa si rivela utilissima per la soluzione delle equazioni lineari in un'incognita del tipo ax + b = c. Interpretando una tale equazione come processo di calcolo su un numero sconosciuto, è possibile risalire a questo operando a ritroso a partire dal termine noto.

Ad esempio: l'equazione 2x + 5 = 13 può essere visualizzata mediante le frecce come composizione degli operatori '× 2' e '+ 5' che, agendo sul numero x, danno luogo a 13. Procedendo sul numero 13 a ritroso applicando in ordine inverso i simmetrici di tali operatori - ossia applicando a 13 prima l'operatore '- 5' ed al risultato ottenuto l'operatore ': 2', si giunge a determinare il valore di x, che risulta essere 4.
Le frecce sono utilizzate anche per le relazioni d'ordine. Ad esempio, rappresentando nell'ambito dei naturali la relazione 'essere divisore', è possibile individuare facilmente, attraverso i percorsi che giungono ad un dato numero, tutti i suoi divisori.
Tale rappresentazione è anche utilizzata nella risoluzione di problemi logici di tipo ludico che coinvolgono relazioni d'ordine quali 'è più grande', 'è più grasso' nell'ambito di un insieme di individui.

Scrittura (matematica) → Frase (matematica)

Segnaposto (lettera come) → Lettera (uso della)

Semantica / sintassi

Come ogni linguaggio, anche quello matematico possiede una sua grammatica, ossia un insieme di convenzioni che consente di costruire correttamente delle frasi matematiche (3 + 4, n < 5, (u + v) : 8 sono esempi di frasi matematiche ove i segni '+', ':', '<' svolgono il ruolo che i predicati svolgono in una lingua. Sono sintatticamente *scorrette* frasi come '9 + + 6 = 15' o la classica catena di operazioni aggiunte una di seguito all'altra del tipo '5 + 3 = 8 : 2 = 4 + 16 = 20'.
Possiede inoltre una *semantica,* che permette di interpretare dei simboli (all'interno di successioni sintatticamente corrette) e successivamente stabilire se le espressioni sono vere o false (per esempio la frase '1 + 1 = 10' è vera o falsa a seconda della base di calcolo: è falsa nel sistema a base 10, vera in quello a base 2).
In merito a quale delle due analisi – quella sintattica o quella semantica – debba precedere l'altra, possiamo capirlo riflettendo sul significato della frase: 'Una vecchia porta la sbarra'. Le interpretazioni possibili sono due:
'Una vecchia (donna) porta la sbarra'
'Una vecchia porta sbarra la (stanza, strada, …)'
Ognuna di esse conduce ad una diversa analisi sintattica:
"Una vecchia (soggetto) – porta (predicato verbale) – la … (complemento oggetto)"
"Una vecchia porta (soggetto) – la (complemento oggetto) – sbarra (predicato verbale)"
Questo esempio mostra chiaramente come la semantica sia soggiacente e guidi l'analisi sintattica.
Nell'apprendimento della matematica, dove vi è un continuo interscambio tra linguaggio verbale e linguaggio matematico, occorre attivare negli allievi da un lato il controllo sui due registri espressivi e, dall'altro, l'abilità metacognitiva di comprendere come trasformazioni sintattiche di espressioni formali condensino processi di pensiero difficilmente realizzabili in linguaggio naturale.

Senso / denotazione

La distinzione tra *senso* e *denotazione* di una espressione si inquadra nella semantica di Frege. Classico è il suo esempio in merito alla doppia denominazione di Venere come *Vespero* (stella della sera) e *Aspero* (stella del mattino), denominazioni con senso opposto. Nel caso delle espressioni algebriche per *senso* si intende l'esplicitazione del modo con cui il denotato può essere ottenuto attraverso l'applicazione di regole computazionali, per *denotazione* si intende il valore o l'insieme dei valori numerici rappresentato dall'espressione in riferimento ad un dato universo numerico.

Sintassi / semantica →Semantica / sintassi

Sociale (conquista, costruzione) →Collettivo/a (confronto, discussione)

Soluzione →Rappresentare / risolvere

Struttura, strutturale

La matematica tende ad unificare lo studio di situazioni che presentino in modo più o meno evidente certe somiglianze al di là del contesto in esame, del tipo di elementi coinvolti e dei loro valori numerici. Il riconoscimento di tali somiglianze avviene creando corrispondenze tra gli elementi delle varie situazioni che rispettino le relazioni fra essi; questo processo è proprio del ragionamento *per analogia.* Quando si riesce a stabilire un tale genere di corrispondenze si dice che le situazioni sono *analoghe* o che presentano *la stessa struttura*, o anche che tra esse intercorre una *analogia strutturale*. Con il termine *struttura* si intende dunque la rete di relazioni che intercorrono tra gli elementi in gioco in una stessa situazione. Le situazioni sono riconosciute come analoghe quando hanno in comune una tale rete. Un caso tipico di analogia strutturale si ha nei problemi, tant'è vero che si parla di *struttura del problema* quando ci si voglia riferire allo schema di ragionamento che, attraverso il concatenamento dei dati, consente di risolvere il problema stesso.
Per indicare e classificare le diverse strutture si parla poi di *modello di problema*.
Consideriamo ad esempio i seguenti problemi:
1. *Per confezionare una gonna la sarta necessita di 1.20 m di stoffa e altrettanto di fodera. Il costo al metro della stoffa è di 73 €, il costo al metro della fodera è di 12 €. Quanto costa la confezione della gonna?*
2. Di un trapezio isoscele si sa che l'altezza è 21 cm, e la metà di ciascuna delle basi è rispettivamente 35 cm e 24 cm. Quanto misura l'area del trapezio?
3. Pierino vuole invitare i suoi cinque più cari amici per la sua festa di compleanno. Fa un accordo con la mamma: lei preparerà torta e dolcetti vari ma Pierino pagherà con i suoi risparmi pizzette e Coca-Cola. Pierino si informa e viene a sapere che una coca cola costa 0.45 € e una pizzetta 0.78 €, quanti euro gli occorrono?
Pur essendo i problemi diversi (come formulazione, contesto, tipologia dei dati, tipologia dei valori dei dati) lo schema di ragionamento è il medesimo:
1. (costo stoffa + costo fodera) × lunghezza dei due tessuti
2. (misura metà base minore + misura metà base maggiore) × misura altezza
3. (costo pizzetta + costo Coca-Cola) × numero amici.
Con l'avvento della matematica moderna il termine *struttura* ha acquisito un significato specifico in relazione a varie aree della matematica: si parla ad esempio di strutture algebriche, di strutture d'ordine, e così via. Questa denominazione raccoglie i vari modelli di organizzazione interna di insiemi in cui siano definite, rispettivamente, delle operazioni binarie soddisfacenti a certe proprietà (caso delle strutture algebriche) o a certe relazioni d'ordine (caso delle strutture d'ordine). Particolare importanza rivestono le *strutture algebriche* che consentono un inquadramento delle strutture soggiacenti ai vari ambiti numerici (naturali, interi relativi, razionali, reali) e il riconoscimento delle

analogie di struttura di questi insiemi con altri ambiti non numerici. Con il termine *struttura* si intende in questo caso la rete di relazioni che sussiste tra gli elementi di un dato insieme grazie alle proprietà di cui godono le operazioni tra questi. L'importanza di questa visione sta nel fatto che si sposta l'attenzione dal numero e dall'azione su di esso alle *leggi* che ne governano l'insieme di appartenenza, cosa che consente di passare da una visione procedurale (di tipo calcolativo) ad una visione globale legata agli aspetti relazionali tra i numeri.
Questo spostamento di attenzione porta ad esempio a riconoscere che i naturali con l'operazione di addizione sono strutturalmente analoghi ai naturali non nulli con l'operazione di moltiplicazione e che questo comporta somiglianze forti tra ordinamento e divisibilità e ancora forti somiglianze tra i processi generativi degli interi e dei razionali.
Un aspetto ancora più importante di questa visione sta nel superamento dell'idea che le operazioni sussistano *solo* tra numeri, concependo di operare con le leggi della aritmetica su enti matematici di tipo *non* numerico. Ad esempio si compongono insiemi mediante le operazioni di unione e di intersezione, si compongono operatori aritmetici, permutazioni, trasformazioni geometriche, eccetera, agendo in successione sui termini su cui questi agiscono. Le leggi a cui tali operazioni obbediscono sono le stesse delle operazioni aritmetiche (proprietà associativa, in alcuni casi proprietà commutativa e, nel caso di due operazioni, proprietà distributiva di una operazione rispetto all'altra).
Questo ampliamento di prospettiva, che unifica e semplifica lo studio di ambienti profondamente diversi nella natura degli elementi, risponde ad una esigenza tipica della matematica: quella di realizzare un'economia di pensiero. Grazie infatti all'analogia di struttura tra due ambiti è possibile trasferire da un ambiente all'altro proprietà più facilmente riconoscibili in uno di essi.

Tradurre / Traduzione

La traduzione è un'operazione di *conversione* da un registro di rappresentazione linguistico in un altro registro rappresentativo, ad esempio in un altro linguaggio. La *traduzione* in matematica avviene molto frequentemente nel passaggio da una forma rappresentativa verbale ad una simbolica, attraverso il linguaggio specifico della matematica; oppure, viceversa, da una forma rappresentativa simbolica ad una linguistica, attraverso il linguaggio verbale (v. tutte le Unità, ma in particolare l'Unità 1 *Progetto Brioshi* e l'Unità 6 *Dalla bilancia all'equazione*). È molto importante che l'introduzione graduale dei simboli porti a vedere quello della matematica come un vero e proprio *linguaggio,* profondamente diverso da quello naturale, dotato anch'esso di una sua semantica e di una sua sintassi. Nonostante si utilizzi sistematicamente la lingua naturale per parlare di matematica, di fatto è necessario rendere consapevoli gli allievi che esistono *specificità* del linguaggio matematico che costituiscono elementi di *rottura* nei confronti del linguaggio naturale, e condurli quindi alla riflessione su queste diversità, e alla consapevolezza sull'uso della terminologia e del simbolismo propri della disciplina matematica.

Trasparente

→ Opaco / Trasparente (rispetto al significato)

Uguale (segno)

Nell'insegnamento dell'aritmetica alla scuola elementare l'uguale esprime essenzialmente il significato di *operatore direzionale*. 4 + 6 = 10 per l'alunno significa:

sommo 4 e 6 e trovo 10. Questa concezione è forte per i primi sette, otto anni di scuola durante i quali l'uguale possiede una connotazione dominante *spazio temporale*: prepara la conclusione di una *storia* che va letta da sinistra verso destra (si eseguono sequenzialmente delle operazioni) sino alla sua conclusione (e infine si ottiene un risultato). Poi, tradizionalmente in terza media, l'alunno incontra l'algebra, e l'uguale improvvisamente assume un significato del tutto diverso: indica *l'equivalenza fra due quantità*. In una scrittura come '8 + x = 2x – 5' esso assume un significato *relazionale*, e contiene un'idea *di simmetria fra due scritture*. Lo studente deve improvvisamente muoversi (spesso senza che nessuno lo abbia 'avvertito' di questo ampliamento di significati) in un universo concettuale del tutto differente, nel quale è necessario andare *oltre* la familiare connotazione spazio temporale. Ma se la concezione dello studente è che 'il numero dopo l'uguale è il *risultato* è probabile che per lui una scrittura come '11 = n' significhi ben poco, anche se magari sa risolvere l'equazione di primo grado che conduce ad essa.
Un esempio ben noto di quanto andiamo dicendo è questo: la richiesta «Scrivi 15 più 12» ottiene quasi sempre la risposta '15 + 12 ='. L'uguale è cioè visto come indicatore di conclusione ed esprime la convinzione implicita dell'alunno che tale conclusione, prima o poi, venga richiesta dall'insegnante. Denota il prevalere di un atteggiamento operativo di fondo, frutto, spesso, di una didattica troppo incentrata sul calcolare e sugli aspetti procedurali. L'assenza del segno è invece vissuta come 'mancanza di chiusura' dell'operazione (la classe infatti considererebbe spesso la scrittura 15 + 12 'monca').

Verbalizzare, verbalizzazione

Verbalizzazione può ritenersi il processo di *esplicitazione*, attraverso la lingua naturale, di un messaggio simbolico, oppure, più in generale, di un processo codificato attraverso una sequenza di operazioni formali. Si possono verbalizzare frasi del linguaggio simbolico oppure le fasi di un algoritmo risolutivo e quindi la procedura risolutiva di un problema. Nelle attività di problem-solving numerose ricerche testimoniano l'importanza per l'allievo di passare attraverso la verbalizzazione del processo effettuato, al fine di promuovere e accrescere la consapevolezza delle scelte fatte e dei significati attribuiti alla procedura seguita. Naturalmente la verbalizzazione di un processo non corretto stimola anche la revisione critica del processo stesso da parte dell'autore: è un'attività di tipo metacognitivo che certamente può condurre, attraverso un uso sistematico, ad un maggiore controllo sulle sue capacità di risoluzione.