1. L’Unità

L’approccio all’equazione descritto in questa unità trae lo spunto da alcuni lavori di ricerca descritti fra gli altri in: Da Rocha Falcâo J.T., 1996, Clinical Analysis of difficulties in algebraic problem solving among brazilian students: principal aspects and didactic issues, Proc. PME 20, 2, 257-263 e in Dias Schliemann & al., 1993, Understanding equivalences through Balance Scales, Proc. PME 17, 2, 298-305.

2. Aspetti didattici

L’attività è finalizzata ad un approccio al pensiero algebrico attraverso l’uso iniziale di una bilancia a piatti.
Vengono attivati processi di costruzione collettiva delle conoscenze; gli alunni elaborano e confrontano rappresentazioni differenti, affinano competenze relative alla traduzione dal linguaggio naturale a quello simbolico e viceversa, esplicitano proprietà delle operazioni, si abituano all’uso della lettera come incognita.

3. Aspetti generali

Allo scopo di favorire il passaggio dall'aritmetica all'algebra molti studi hanno esplorato l'uso di metafore culturalmente significative come la *bilancia a piatti*.
In Italia la bilancia a piatti viene proposta in alcuni testi di matematica della scuola media, soprattutto nelle parti dedicate agli esercizi, come supporto all’attività sulle equazioni. Il suo uso didattico è comunque occasionale e la concretezza che evoca è puramente *virtuale*, nel senso che intende sostenere il passaggio verso l’astrazione con un supporto *realistico* che rimane però solo una rappresentazione dell’oggetto, spesso nemmeno familiare all’alunno. La bilancia dovrebbe comportare un atteggiamento *sperimentale* ma in questo modo non viene realmente *sperimentata*. L’esito è probabilmente che, se la si usa, lo si fa per proporre un problema fuori dall’ordinario, ma non si consente allo studente di interiorizzarne gli aspetti concettuali e quindi manca, nella sostanza, l’obiettivo per il quale la si è introdotta.
La ricerca in didattica della matematica si è ampiamente occupata della bilancia a piatti, e ne ha sottolineato gli aspetti di rischio presenti in un suo uso prolungato, legati soprattutto alla possibilità che si creino negli alunni degli stereotipi e quindi delle fissità concettuali, o addirittura dei misconcetti, che potrebbero rappresentare dei freni o dei ‘distorsori’ ad uno sviluppo coerente del pensiero algebrico.
Il nostro obiettivo, che dai risultati raccolti in questi anni appare plausibilmente raggiungibile, è quello di verificare come nella soluzione di problemi verbali algebrici *un particolare utilizzo della bilancia a piatti, integrato con un opportuno uso della rappresentazione, possa costituire un approccio favorevole allo sviluppo di schemi pre-algebrici* negli alunni e possa consentire di giungere all'elaborazione di *equazioni “ibride”* nelle quali far coesistere – in una fase iniziale provvisoria - *linguaggio naturale, linguaggio iconico e operatori formali matematici.*
L'itinerario si organizza, attraverso la soluzione di opportune sequenze di problemi con la bilancia prima, e verbali poi, attorno alla *costruzione collettiva del concetto di equazione lineare* visto come punto di arrivo di un percorso centrato su *schematizzazioni successive di rappresentazioni* di situazioni proposte inizialmente con la bilancia a piatti.
Viene prestata restiamo attenzione sistematica alla *pluralità delle rappresentazioni* di cui un dato oggetto è sensibile; in modi progressivamente più evoluti, con il passaggio dalla scuola elementare alla media, gli allievi vengono portati a cogliere come *la scelta di una rappresentazione influenzi lo sviluppo delle argomentazioni sull'oggetto rappresentato* e come l'efficacia di ciascuna di esse sia strettamente correlata con l'ambiente nel quale l'oggetto è inserito e con gli scopi dell'osservatore.

4. Materiali necessari

Una bilancia a piatti; un kit di pesi sconosciuti e di pesi conosciuti. Negli esempi riportati nell’unità i pesi sono costituiti da scatolette recanti di volta in volta le scritte “farina”, “sale”, “riso” e “60”, “120”, “150”, “200”, “270”. La precisione nella costruzione dei pesi non è necessaria perché, quasi subito, i piatti vengono bloccati nella posizione di equilibrio (v. Commento 1, situazione 1) e quindi eventuali imperfezioni non vengono rilevate.

5. Pubblicazioni del GREM sul tema

Il primo articolo aiuta l'insegnante a contestualizzare l'attività e a trovare indicazioni utili per una parte del suo svolgimento; il secondo presenta una riflessione sulle scritture 2s, s x 2, 3 x s (v. Fase 2, situazione 10).

(Navarra 2002): Navarra G., Progetto ArAl, La bilancia a piatti come metafora dell'equazione, Prima parte: l'attività con la bilancia, in attesa di pubblicazione.

(Navarra 2001a): Navarra G., Percorsi esplorativi di avvio al pensiero algebrico attraverso problemi; osservazione e rilevazione di difficoltà in insegnanti e allievi, *Atti del III Conv. Naz. Intenuclei Sc. dell'obbligo*, Vico Equense, 2001, 53-60.

6. Terminologia e simbologie

Fase — Successione di situazioni di difficoltà crescente facenti riferimento allo *stesso tema*.

Situazione — Problema attorno al quale *si sviluppano* attività di tipo individuale, di gruppo, di classe.

Espansione — Ipotesi di lavoro su un possibile ampliamento dell'attività verso una direzione *algebrica*. La sua realizzazione dipende dalle condizioni ambientali e dagli obiettivi dell'insegnante.

Nota — Suggerimento per l'insegnante di carattere metodologico o operativo.

> Riquadro colorato contenente la descrizione di una situazione problematica.
> Il testo è indicativo; può essere anche presentato così com'è ma in genere la sua formulazione rappresenta il frutto di una mediazione sociale fra l'insegnante e la classe

Riquadro contenente la traccia di una discussione tipo; possono comparire i seguenti simboli

- v — Intervento dell'insegnante
- Intervento di un alunno
- Compendio di alcuni interventi
- Risultato di una discussione collettiva (un principio, una regola, una conclusione, un'osservazione, e così via)

Rappresentazione — Una parola in blu sottolineata evidenzia un collegamento attivo con un tema illustrato nella parte generale (all'occorrenza nel Glossario). Se l'unità viene visionata in rete, è sufficiente cliccare sopra la parola per attivare il collegamento; se viene stampata, il lettore sa che essa rimanda a delle spiegazioni che andranno cercate nella parte generale.

FASI	SITUAZIONI	ARGOMENTI
Prima	1 - 6	Attività con la bilancia a piatti
Seconda	7 - 12	Rappresentazione dei 'problemi con la bilancia'
Terza	13 - 17	Problemi verbali aventi per oggetto la bilancia
Quarta	18 - 22	Problemi verbali con supporto iconico risolvibili anche con equazioni
Quinta	23 - 31	Problemi verbali algebrici

8. Distribuzione delle situazioni in relazione all'età degli alunni

La distribuzione rappresenta una proposta indicativa basata sull'esperienza nelle classi del progetto. Le prime due fasi e il tempo per il loro svolgimento sono, in un certo senso, 'obbligate'; le fasi successive, che si articolano attorno alla soluzione di problemi e alla loro discussione collettiva sono molto più libere, e anche il tempo dedicato ad ogni situazione può restringersi o dilatarsi in base alle scelte di metodo o di opportunità dell'insegnante. Diciamo che nelle fasi III, IV e V quello scritto è quindi il 'tempo di permanenza' consigliato.
Per quanto concerne la seconda e la terza media, l'indicazione della durata parte dal presupposto che le classi abbiano già incontrato l'algebra, e quindi la soluzione di equazioni di primo grado; naturalmente, se ciò non fosse avvenuto, ai tempi ipotizzati vanno aggiunti quelli necessari allo svolgimento delle due fasi precedenti.

<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="31">FASI E SITUAZIONI</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="6">I</td><td colspan="6">II</td><td colspan="5">III</td><td colspan="5">IV</td><td colspan="9">V</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td><td>26</td><td>27</td><td>28</td><td>29</td><td>30</td><td>31</td></tr>
<tr><td>el</td><td>5</td><td colspan="6">7 ore</td><td colspan="6">3 ore</td><td colspan="5">3 ore</td><td colspan="5">2 ore</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">me</td><td>1</td><td colspan="6">5 ore</td><td colspan="6">3 ore</td><td colspan="5">3 ore</td><td colspan="5">4 ore</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="5">3 ore</td><td colspan="5">5 ore</td><td colspan="9">4 ore</td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="5">4 ore</td><td colspan="9">6 ore</td></tr>
</table>

Attività adatte alle classi	1	2	3	4	5	1	2	3	Commenti

Prima fase

1[1]. Si costruisce una bilancia artigianale (un fulcro e un'asta con alle estremità due oggetti di peso uguale) e si ragiona assieme agli alunni su quali siano le condizioni per l'equilibrio.

La discussione conduce alla formulazione collettiva di una conclusione: se i pesi sono uguali la bilancia è in equilibrio. Da cui si ricava che: se i pesi non sono uguali la bilancia non è in equilibrio.
Si deduce quindi e si fa trascrivere l'importante conseguenza
Principio fondamentale della bilancia:

Se la bilancia è in equilibrio allora nei piatti ci sono pesi uguali

Nota

Come viene illustrato nei Commenti, quelle che stanno iniziando non sono attività sperimentali nelle quali bisogna conquistare e mantenere l'equilibrio fra i piatti. Per questa ragione non è necessario predisporre pesi 'veri', ma piuttosto oggetti che 'stiano per' i pesi: scatolette o sacchetti sui quali si sarà scritto 'sale', 'farina', '200g', '120g', anche senza che alle scritte corrispondano cose 'reali'. Si suggerisce quindi: per le prime due situazioni si prepari del materiale che permetta di raggiungere un equilibrio 'visibile' in modo da favorire la percezione dell'orizzontalità fra i piatti; poi, una volta 'bloccata' la bilancia in una condizione di equilibrio, si potrà continuare a lavorare con pesi virtuali. Naturalmente il contratto didattico deve essere concordato con la classe.

Inizia ora l'attività con la bilancia a piatti. Di volta in volta l'insegnante organizza le situazioni: sposta i 'pesi', li toglie, li aggiunge, a seconda delle indicazioni degli alunni che osservano, propongono, argomentano. Le esperienze possono essere ripetute più volte per favorire la comprensione e la classe può intervenire nella manipolazione degli oggetti. In questa fase si scrivono sul quaderno esclusivamente le conclusioni di volta in volta raggiunte, che verranno chiamate princìpi. [2]

[1] Lo scopo di questa esperienza è di avvicinare gli alunni all'equilibrio come aspetto centrale dell' attività: da questo momento la bilancia è da considerare in equilibrio indipendentemente dal fatto che i piatti siano davvero allineati.
Il principio fondamentale dovrà essere esplicitato di frequente per favorire il suo consolidamento nelle convinzioni degli alunni. Le bilance a piatti scolastiche, piuttosto instabili,in genere non sono di grande aiuto in questo senso. Conviene quindi adottare degli stratagemmi che distolgano l'attenzione della classe dagli indicatori (in genere lancette) di un equilibrio che non solo viene raggiunto a fatica in sede sperimentale ma che non rappresenta nemmeno, in questa attività, un obiettivo didattico. Per esempio, si può concordare con la classe di bloccare i piatti per evitare la loro oscillazione. Il contratto didattico deve essere chiaro: l'equilibrio è una costante, indipendentemente dal suo raggiungimento concreto

[2] I principi corrispondono a quelli noti, nella didattica delle equazioni, come 'princìpi di equivalenza'.

Attività adatte alle classi	1	2	3	4	**5**	**1**	2	3	Commenti

2. Si propone la prima esperienza

Piatto di sinistra	Piatto di destra
sale[3]	200g

(Quinta elementare)
v: Quanto pesa il sacchetto di sale?
: Il sale pesa 200 grammi.
v: Come avete fatto a trovare questo numero?
: Ma è evidente!
v: Provate a spiegarvi[4].
Gli alunni in genere non capiscono cosa l'insegnante si aspetti da loro, perché la situazione sembra evidente 'in sé'. È necessario indirizzare la loro riflessione verso l'equilibrio.
Si conclude che:
(1) poiché la bilancia è in equilibrio,
(2) per il principio fondamentale i pesi sono uguali;
(3) si trova quindi che il sacchetto di sale pesa 200 grammi.

3. Seconda esperienza

Piatto di sinistra	Piatto di destra
Farina; 50 g	120 g

(Quinta elementare)
v: Come si può fare per scoprire quanto pesa il sacchetto di farina?
: La farina pesa 70 grammi.
v: Come avete fatto a trovare questo numero?
: Si fa 120 meno 50 e si trova la farina[5].
v: Ma se togliete 50 grammi solo da una parte la bilancia non è più in equilibrio. Bisogna che il principio fondamentale sia rispettato.
Anche in questo caso gli alunni hanno bisogno di essere indirizzati verso un ragionamento che tenga conto dell'equilibrio[6].
Si conclude che:
(1) poiché la bilancia è in equilibrio
(2) i pesi sono uguali (principio fondamentale);
(3) se si toglie lo stesso peso da entrambi i piatti la bilancia rimane in equilibrio e questo vuol dire che
(4) i pesi rimanenti sono uguali;
(5) quindi la farina pesa 70 grammi.
La considerazione esplicitata nel punto (3) viene trascritta nel

Primo Principio della bilancia

Se si tolgono pesi uguali dai piatti di una bilancia in equilibrio, essa rimane in equilibrio[7].

[3] Per ragioni tipografiche si indica qui con 'sale' quello che in realtà è un contenitore di sale, come in seguito si indicherà con 'farina' un sacchetto di farina e così via.

[4] È importante curare la riflessione e la verbalizzazione; è quindi inevitabile che, soprattutto all'inizio, l'attività proceda lentamente.
Si ribadisce che l'equilibrio va costantemente esplicitato perché gli alunni tendono a risolvere i problemi intuitivamente e a concentrarsi solo sulle operazioni.

[5] Le espressioni gergali riportate nella discussione (ad es: "Si fa…") sono frequenti nelle discussioni in classe e, tendenzialmente, andrebbero 'ripulite'. Anche nel caso di frasi come "… si trova la farina", la genericità del linguaggio indica un controllo debole dei concetti soggiacenti perché in realtà non si trova 'la farina' ma 'il peso di un sacchetto di farina'. Il passaggio dall'oggetto al suo peso è molto delicato e va verificato di continuo.

[6] Aiuta, al momento opportuno, sostituire il 'peso' di 120g con due 'pesi' di 70g e di 50g. La situazione così aggiornata favorisce la conquista della conclusione:

piatto di sinistra	*piatto di destra*
farina 50g	*70g 50g*

[7] Molto spesso si giunge ad un ampliamento del Primo Principio, perché gli alunni si rendono conto che esso mantiene la sua validità anche quando si aggiunge lo stesso peso in entrambi i piatti.

Attività adatte alle classi	1	2	3	4	5	1	2	3	Commenti

4. Terza esperienza

Piatto di sinistra	Piatto di destra
Sale; sale	200 g

(Quinta elementare)

v: Come si può fare per scoprire quanto pesa il contenitore di sale?

: Il sale pesa 100 grammi.

v: Come avete fatto a trovare questo numero?

: Si fa una divisione.

v: Se dividete solo i 200 grammi del piatto di sinistra la bilancia non è più in equilibrio. Ricordate il principio fondamentale? Inoltre riflettete sul primo principio della bilancia[8].

Si conclude che:

(1) poiché la bilancia è in equilibrio,

(2) i pesi sono uguali (principio fondamentale);

(3) se si divide per 2 a sinistra allora si deve dividere per 2 anche a destra in modo che la bilancia rimanga in equilibrio;

(4) quindi il sale pesa 100 grammi.

Si ripete poi l'esperienza modificando la situazione di partenza:

piatto di sinistra	*piatto di destra*
sale; sale; sale	300g

Si comprende che in questo caso bisogna dividere per 3.

La considerazione del punto (3) può essere quindi generalizzata nel

Secondo Principio della bilancia

Se si dividono per lo stesso numero i contenuti dei piatti di una bilancia in equilibrio, essa rimane in equilibrio.

[8] Questa situazione è più complessa della precedente. Gli alunni tendono a concludere sbrigativamente che un contenitore pesa 100g e la spiegazione è ancora una volta intuitiva: «Si divide 200 per 2». Si mostra che facendo così la bilancia si squilibra; il richiamo al primo principio aiuta (i) a capire che bisogna dividere (in questo caso per 2) il contenuto di entrambi i piatti e (ii) a conquistare così il Secondo Principio.

Attività adatte alle classi	1	2	3	4	**5**	**1**	2	3	Commenti

5. Quarta esperienza

Piatto di sinistra	Piatto di destra
150 g; sale	Sale; sale; sale; sale

(Quinta elementare)
v: Come si può fare per scoprire quanto pesa un sacchetto di sale?[9]

Gli alunni capiscono che bisogna:
(I) applicare il primo principio, questa volta a quantità sconosciute e
(II) applicare il secondo principio a quelle che rimangono.
Si conclude che:
(1) poiché la bilancia è in equilibrio,
(2) i pesi sono uguali (principio fondamentale);
(3) si applicano prima il primo principio (si toglie un sacchetto di sale per parte) e poi
(4) il secondo principio (si divide per 3);
(5) quindi il sale pesa 50 grammi[10].

6. Quinta esperienza

Piatto di sinistra	Piatto di destra
270 g; riso; riso	riso; riso; riso; riso; riso; 60g[11]

(Quinta elementare)
v: Come si può fare per scoprire quanto pesa un sacchetto di riso?

Gli alunni capiscono che bisogna:
(I) applicare il primo principio sia alle quantità conosciute che a quelle sconosciute, e poi
(II) applicare il secondo principio a quelle che rimangono[12].
Si conclude che:
(1) poiché la bilancia è in equilibrio
(2) i pesi sono uguali (principio fondamentale)[13]
(3) se si applica il primo principio (si tolgono da entrambe le parti due sacchetti di riso e 60 grammi) e successivamente
(4) si applica il secondo principio (si divide per 3);
(5) si trova che il riso pesa 70 grammi.

[9] Frequentemente in un primo momento alcuni alunni propongono di "dividere 150 per 4". La discussione richiede la continua mediazione dell' insegnante che ha il compito di favorire il ricorso consapevole ai due principi. È opportuno che le proposte della classe vengano immediatamente 'tradotte' in azioni concrete in modo da confermare o meno la loro correttezza.

[10] La soluzione di un'equazione comporta l'isolamento dell'incognita in un membro e dei valori numerici nell'altro. Questo aspetto rappresenta uno degli ostacoli di fondo che gli alunni devono superare perché molto probabilmente la maggior parte di loro è ancora alla ricerca delle operazioni da eseguire, ed è lontana dall'idea che, per rispondere alla domanda iniziale 'Quanto pesa un sacchetto di sale?', bisogna fare in modo da lasciare in un piatto soltanto pesi sconosciuti e nell'altro solo i noti. L'esperienza con la bilancia favorisce in modo potente la comprensione graduale di questo aspetto, portando l'attenzione sulle connessioni fra gli elementi del problema (punto di vista relazionale) e distogliendolo dalla ricerca dei calcoli (punto di vista procedurale).

[11] I pesi sconosciuti sono posti in numero maggiore nel secondo piatto che nel primo perché è importante che gli alunni non assumano lo stereotipo che l'incognita debba stare a sinistra.

[12] La discussione spesso è laboriosa; l'impegno dell'insegnante è quello di favorire la conquista della soluzione senza sostituirsi alla classe nei momenti più delicati.

[13] Al momento opportuno conviene che - su indicazione della classe o su suggerimento dell'insegnante – il 270g venga sostituito da due pesi di 210g e 60g (v. Commento 2, Situazione 3).

Attività adatte alle classi	1	2	3	4	**5**	**1**	2	3	Commenti

Seconda fase

7. Si passa alla rappresentazione[14] sul quaderno delle cinque esperienze. Si comincia con l'invitare la classe a proporre un disegno della bilancia e degli oggetti che compaiono nei piatti (pesi conosciuti e sconosciuti).
Ogni alunno elabora il suo disegno che poi viene riportato alla lavagna. Compaiono rappresentazioni molto diverse che riflettono due atteggiamenti opposti variamente intersecati:
(a) descrittivo
(b) interpretativo.
I disegni del tipo (a) sono realistici, dettagliati, ricchi di particolari spesso sovrabbondanti, hanno l'obiettivo di 'far vedere' chiaramente gli oggetti usati nelle esperienze (la bilancia, i sacchetti, le scatolette e così via). Il punto di vista è quello della concretezza.
I disegni del tipo (b) sono schematici, più semplici dei precedenti, eliminano il superfluo; gli oggetti sono rappresentati con simboli (rettangoli, quadrati, lettere). Esprimono una tendenza all'astrazione.
I disegni vengono posti a confronto e si apre la discussione su di essi, con l'obiettivo di giungere ad una rappresentazione condivisa

(Quinta elementare)
[15] I disegni esprimono punti di vista fortemente mescolati, spesso ambigui. È evidente che, per molti alunni, le lettere al posto dei pesi sconosciuti non rappresentano numeri, ma sono iniziali di nomi ('s' per 'sale', 'f' per 'farina') o abbreviazioni, oppure hanno la funzione di etichette spesso collocate dentro icone rettangolari o quadrate che rappresentano gli oggetti utilizzati nell'esperienza (come ad es. 'la scatola'). I pesi noti sono rappresentati sia con che senza l'indicazione dell'unità di misura (questo aspetto verrà messo in discussione in seguito).
Poco alla volta la classe esclude delle rappresentazioni e spesso le scelte sono dolorose: gli alunni 'descrittivi' considerano poveri di informazioni i disegni del gruppo (b) e alcuni oppongono una resistenza forte ad accettare come 'valore' quella che si potrebbe definire una 'rarefazione figurativa'. In ogni caso, man mano che i disegni vengono cancellati, quelli che rimangono finiscono per imporsi per la loro sinteticità ricca di significati, cioè per la loro valenza *simbolica*.
In ogni caso, deve risultare chiaro a tutti che il confronto si conclude con la scelta della rappresentazione più coerente con il concetto chiave dell'attività e cioè con quello di *equilibrio*.
Si giunge ad una rappresentazione di questo tipo[16]:

[14] La rappresentazione costituisce il passaggio determinante dalla bilancia all'equazione e favorisce l'approccio al pensiero algebrico.
Ha l'obiettivo di portare gli alunni (che, di fronte ad un problema, per abitudine tendono a cercare le operazioni e il relativo risultato) ad individuare gli aspetti relazionali interni al problema, rimandando ad un momento successivo la ricerca del risultato.

[15] La discussione schematizzata nel riquadro è indicativa e dipende molto dal fatto che la classe abbia o meno già incontrato l'uso dei simboli letterali in matematica.

Nota

Se la classe non ha mai incontrato in precedenza l'uso della lettera, potrebbe giungere alla conclusione che sia indifferente usare simboli iconici oppure letterali per indicare le incognite. Se da un certo punto di vista questo è vero, si consiglia comunque di favorire l'uso delle lettere, più proficuo per lo sviluppo del pensiero pre-algebrico. La scelta della lettera può essere libera per non favorire le stereotipo che l'incognita si debba indicare con la lettera x.

[16] Lo schema verrà usato fino a che gli alunni non si renderanno conto (da soli o su sollecitazione) che è inutile perché l'unico simbolo realmente significativo è l'uguale.

Attività adatte alle classi	1	2	3	4	**5**	**1**	2	3	Commenti

=
△

Quale che sia il disegno scelto, esso deve contenere il segno ‘=’[17].

Nelle prossime situazioni le cinque esperienze, ricapitolate una alla volta (la bilancia va usata solo se è necessario) verranno trascritte sui quaderni applicando lo schema della bilancia individuato dalla classe al termine della discussione. Si dovranno rappresentare:

i. la situazione di partenza,
ii. le azioni eseguite, i principi applicati e le relative conseguenze
iii. la conclusione (l’individuazione del valore dell’incognita).

8. Prima esperienza

Piatto di sinistra	Piatto di destra
sale	200 g

Si perviene, in genere senza difficoltà, ad una scrittura di questo tipo:

a = 200[18]

9. Seconda esperienza

Piatto di sinistra	Piatto di destra
Farina; 50 g	120 g

Bisogna trovare il modo per rappresentare il fatto che si devono togliere 50g per parte (ossia che si applica il primo principio).
La complicazione maggiore concerne la parte destra della scrittura: 120g. Molto spesso viene proposto di scomporre il numero 120 in 50 + 70. Altrettanto frequentemente viene poi proposta la cancellazione per rappresentare l’atto del togliere il peso da 50 grammi dai due piatti.

$$p + 50 = 120$$ [19]

$$p + \cancel{50} = \cancel{50} + 70$$

$$p = 70$$

La scrittura alla quale si può pervenire è di questo genere (altre rappresentazioni molto comuni sono nei *Commenti*[20]):
Si fissa collettivamente la seguente convenzione: per rendere il più possibile trasparente il processo, dopo aver applicato un principio, *nella riga successiva bisogna sempre rappresentare ciò che rimane della riga precedente*.

[17] *In una quinta un’alunna ha proposto, prima che venisse suggerito l’’=’, un asse verticale per rappresentare la simmetria fra le due parti, mostrando così di avere intuito un aspetto teorico con importanti conseguenze pratiche: per esempio, esso permette di scambiare il contenuto dei piatti.*

[18] *Inizialmente gli alunni scrivono la marca; col tempo capiscono che non è necessario inserirla nell’equazione ma solo indicarla nella risposta (la struttura dell’equazione rimane la stessa, indipendentemente che si tratti di milligrammi o di tonnellate).*

[19] *Soprattutto nelle fasi iniziali, il segno ‘+’ compare in pochi protocolli, sufficienti però per far riflettere gli alunni sulla necessità della sua introduzione nelle scritture. È un’occasione importante per favorire il passaggio dal simbolo come rappresentazione dell’oggetto (le lettere che indicano i sacchetti poste l’una accanto all’altra come i rispettivi oggetti sul piatto) al simbolo come nome del* numero (*il* peso).

[20] *Altre rappresentazioni molto comuni del Primo Principio sono:*

(a) $p + 50 = 120$
$p + \cancel{50} - \cancel{50} = 120 - 50$
$p = 70$

(b) $p + 50 = 120$
$-50 \quad -50$
$p = 70$

Attività adatte alle classi	1	2	3	4	**5**	**1**	2	3	Commenti

10. Terza esperienza

Piatto di sinistra	Piatto di destra
Sale; sale	200 g

È un momento molto delicato perché compare la necessità di rappresentare l'applicazione del secondo principio. Si riporta una delle rappresentazioni finali più frequenti:

s + s = 200
2s = 200[21]
2s : 2 = 200 : 2
s = 100

[21] *Molti alunni si trovano più a loro agio con la rappresentazione additiva (s + s) che con quella moltiplicativa (2s, s x 2, 2 x s, …) che comporta difficoltà concettuali anche sottili, al di là di una loro apparente 'evidenza'. A questo proposito si consiglia la lettura di (Navarra 2001a).*
Si riportano altri esempi delle rappresentazioni più diffuse dell' applicazione del Secondo Principio:

(c) s + s = 200
(s + s) : 2 = 200 : 2
s = 100

(d) s + s = 200
¯ : 2 ¯ : 2
s = 100

(e) s x 2 = 200
s x 2 : 2 = 200 : 2
s = 100

Si può accettare una rappresentazione iniziale non convenzionale come la freccia; il passaggio ad una scrittura formalmente più corretta avverrà per gradi.

Attività adatte alle classi	1	2	3	4	5	1	2	3	Commenti

11. Quarta esperienza

Piatto di sinistra	Piatto di destra
150 g; sale	Sale; sale; sale; sale

$150 + \cancel{a} = \cancel{a} + a + a + a$[22]
$150 = a + a + a$
$150 = 3a$
$150 : 3 = 3a : 3$
$50 = a$[23]

12. Quinta esperienza

Piatto di sinistra	Piatto di destra
270 g; riso; riso	Riso; riso; riso; riso; riso; 60 g

$270 + \cancel{b} + \cancel{b} = \cancel{b} + \cancel{b} + b + b + b + 60$[24]
$270 = b + b + b + 60$
$\cancel{60} + 210 = b + b + b + \cancel{60}$
$210 = 3b$
$210 : 3 = 3b : 3$
$70 = b$

Terza fase

Vengono proposti dei problemi verbali che descrivono situazioni aventi per oggetto la bilancia. Rappresentano una fase di transizione verso problemi verbali di maggiore complessità (**Quarta fase**).
Vengono condivise con la classe le seguenti convenzioni:

- per non appesantire i testi, a nomi uguali corrispondono pesi uguali;
- la bilancia si intende sempre in equilibrio;
- una lettera non può rappresentare quantità diverse;
- cose differenti si rappresentano con lettere differenti.

> Su un piatto ci sono un pacchetto di caramelle e un peso di 30 grammi. Sull'altro c'è un peso di 110 grammi.
> Rappresenta la situazione in modo da trovare il peso del pacchetto.

C = peso di un pacchetto di caramelle[25]
Rappresentazioni possibili[26]:

$C + 30 = 110$
$C + \cancel{30} = \cancel{30} + 80$ — scomposizione e cancellazione
$C = 80$

$C + 30 = 110$
$C + \cancel{30} - \cancel{30} = 110 - 30$ — primo principio e cancellazione
$C = 80$

$C + 30 = 110$
$\downarrow -30 \quad \downarrow -30$ — primo principio
$C = 80$

[22] *Nelle tre situazioni precedenti si è applicato il principio di cancellazione a quantità note; ora lo si applica anche alle quantità incognite. Il passaggio, dopo tale percorso, non rappresenta una difficoltà per gli alunni.*

[23] *Si consiglia di usare anche lettere che non abbiano attinenza diretta col problema; questo allo scopo di evitare il fenomeno della persistenza semantica (il simbolo come segnaposto per l'oggetto invece che come numero).*

[24] *Nella precedente equazione e in questa la lettera si trova deliberatamente* a destra. *L' obiettivo è di non indurre lo stereotipo che l'incognita* debba stare *a sinistra. Conviene non imporre la 'x' per la stessa ragione. Le convenzioni 'x, y ,…' per le incognite; 'a, b, …' per i parametri; ecc.) vanno introdotte con la necessaria gradualità.*

Nota

La bilancia reale va usata d'ora in poi con parsimonia. Gli alunni devono ormai aver interiorizzato il concetto di equivalenza*; un uso troppo prolungato dell'oggetto può creare* stereotipi *(fissarsi su una visione 'concreta' dell'equazione).*

[25] *Si consiglia di far scrivere, prima della rappresentazione, il significato attribuito alle lettere usate. Questo limita un loro uso inconsapevole.*

[26] *Gli alunni devono argomentare i passaggi descrivendo proprietà e princìpi usati.*
È necessario favorire una graduale 'pulizia' delle scritture curando costantemente però la comprensione del loro significato. *Sono fasi molto delicate durante le quali si possono formare le premesse per misconcetti e per errori procedurali.*

Attività adatte alle classi	1	2	3	4	5	1	2	3	Commenti

14.

Su un piatto ci sono due scatole di tonno, una confezione di spaghetti e un peso di 200 grammi. Sull'altro una confezione di spaghetti, una scatola di tonno e 350 grammi.
Rappresenta la situazione in modo da trovare il peso di una scatola di tonno.

a = peso di una scatola di tonno
b = peso di una confezione di spaghetti

$a + \cancel{a} + \cancel{b} + 200 = \cancel{b} + \cancel{a} + 350$
$a + 200 = 350$
$a + \cancel{200} = \cancel{200} + 150$
$a = 150$[27]

[27] *Un'altra soluzione (quinta elementare) (v. Commento [3], Situazione 9):*

$a + \cancel{a} + \cancel{b} + 200 = \cancel{b} + \cancel{a} + 350$
$a + \cancel{200} - \cancel{200} = 350 - 200$
$a = 150$

Note

In genere è in questa fase che gli alunni si cominciano a chiedere quali, fra le rappresentazioni usate, siano 'migliori' di altre. Quelle proposte nel problema 14 sono entrambe valide; quella che utilizza le frecce (ad es: nel problema 13) è più espressiva nelle fasi iniziali (spesso continua ad essere quella preferita dagli alunni più deboli) ma conviene superarla perché ostacola lo sviluppo di un corretto linguaggio formale. Conviene che problemi del tipo di quelli proposti vengano diluiti nel tempo e non rappresentino un'occasione 'unica' in cui si affrontano problemi 'diversi dal solito'. Lo scopo principale, infatti, è di offrire agli alunni lo spazio per delle riflessioni sui possibili significati differenti che può assumere una lettera in ambito matematico, in modo da favorire forme sempre più evolute di balbettio algebrico. Si vedano a questo scopo i Diari allegati alla presente unità.

15.

Su un piatto ci sono sei scatole di cibo per gatti, una lettiera e un peso di 1,5 kg. Sull'altro ci sono una lettiera, un peso di 2kg, uno di mezzo chilo e due scatole di cibo per gatti.
Rappresenta la situazione in modo da trovare il peso di una scatola di cibo per gatti.

x = peso di una scatola di cibo per gatti y = peso della lettiera

$x + x + x + x + \cancel{x} + \cancel{x} + \cancel{y} + 1{,}5 = \cancel{y} + 2 + 0{,}5 + \cancel{x} + \cancel{x}$ [28]
$4x + 1{,}5 = 2{,}5$
$4x + \cancel{1{,}5} - \cancel{1{,}5} = 2{,}5 - 1{,}5$
$4x = 1$
$4x : 4 = 1000 : 4$ [29]
$x = 250$

[28] Per potenziare il controllo sui significati delle scritture è opportuno stimolare l'esplorazione di come diverse scomposizioni dei numeri in gioco conducano – attraverso differenti applicazioni del principio di cancellazione *- alla medesima soluzione; per esempio nell'equazione a lato:*
… + 1 + ~~0,5~~ = …+ 2 + ~~0,5~~ + …
oppure:
… + ~~1~~ + ~~0,5~~ = …+ 1 + ~~1~~ + ~~0,5~~ + …
oppure:
… + ~~1,5~~ = …+ 1 + ~~1,5~~ + …

[29] La conversione
1 (kg) → 1000 (g)
utilizzata fra il terzo e il quarto passaggio dell'equazione precedente semplifica i calcoli ma può rappresentare un passaggio delicato.
Può essere conveniente (dipende dalla situazione della classe) 'uscire' momentaneamente dall' equazione e concentrarsi sul significato numerico della scrittura in relazione alla situazione in esame. Si supponga di continuare a lavorare con i chilogrammi; l'equazione precedente si concluderebbe in questo modo:
…
$4x = 1$
$4x : 4 = 1 : 4$
$x = ¼ = 0{,}25$

La domanda da porre sarebbe: Cosa significa in questo caso '0,25'?

0,25 di kilogrammo
0,25 = 25/100 di kilogrammo

Poiché 1kg = 1000g si concluderebbe che:

$\frac{25}{100} \times 1000 = 250g$

Questa situazione offre nelle classi di scuola media un interessante spazio di riflessione sul coordinamento delle rappresentazioni in gioco e sulle conversioni delle stesse in relazione alle grandezze in questione (kg e g).

Attività adatte alle classi	1	2	3	4	**5**	**1**	**2**	3	Commenti

Problemi *con soluzioni indeterminate*. Due esempi:

16.

Su un piatto ci sono tre confezioni di biscotti e una scatola di cioccolatini. Sull'altro una confezione di biscotti, 350 grammi e altre due confezioni di biscotti. Rappresenta la situazione in modo da trovare
(a) il peso di una confezione di biscotti;
(b) il peso della scatola di cioccolatini.

x = peso di una confezione di biscotti
y = peso di una scatola di cioccolatini

$$\cancel{x} + \cancel{x} + \cancel{x} + y = \cancel{x} + 350 + \cancel{x} + \cancel{x}$$ [30]

Qualunque sia il valore di a, la bilancia è sempre in equilibrio.

17.

Su un piatto ci sono una bottiglia di latte, un pacchetto di burro e due pesi, uno di 30 e uno di 40 grammi. Sull'altro ci sono un pacchetto di burro e un peso di 220 grammi.
(a) Trova il peso della bottiglia di latte;
(b) Puoi trovare il peso del burro?

l = peso di una bottiglia di latte   b = peso di un pacchetto di burro

$$l + \cancel{b} + 30 + 40 = \cancel{b} + 220$$
$$l + 70 = 220$$
$$l + \cancel{70} = 150 + \cancel{70}$$
$$l = 150$$

Il problema non dà informazioni che consentano di trovare il peso del burro.

[30] *Un'altra rappresentazione (prima media):*

$3x + y = x + 350 + 2x$
$\cancel{x} + \cancel{2x} + y = \cancel{x} + 350 + \cancel{2x}$
$y = 350$

$x = ?$

Attività adatte alle classi	1	2	3	4	**5**	**1**	**2**	**3**	Commenti

Quarta fase

Si propone una nuova serie di problemi verbali; si differenziano profondamente dai precedenti perché nei testi non compaiono più né piatti né pesi, però al loro interno ‘si nasconde una bilancia’, cioè sono risolvibili mediante un’equazione. Alcuni sono risolvibili anche in modo non algebrico (mostreremo qualche esempio); in questi casi bisogna utilizzare le differenti soluzioni per un confronto fra strategie. Anche le rappresentazioni attraverso l’uso delle lettere possono essere molto diverse, e costituire nuovo terreno per confronti e discussioni[31].
È molto probabile che vengano proposte scritture ibride; sono forme di balbettio algebrico che contribuiscono – attraverso il confronto – alla formazione consapevole delle basi del linguaggio formale. La maggior parte dei problemi di questa fase è accompagnata da un supporto iconico che favorisce la percezione degli elementi in equilibrio e quindi dei ‘piatti della bilancia’.
L’insegnante si accorgerà ben presto, probabilmente, che molti alunni puntano ancora alla soluzione del problema e quindi alla ricerca delle *operazioni*; bisognerà recuperare il concetto di rappresentazione stimolando un approccio al problema che favorisca l’analisi delle relazioni fra gli elementi in gioco. È molto importante a questo scopo l’accurata analisi (inizialmente può essere collettiva) del testo per capire quali parti consentono di individuare i ‘piatti’ e il loro contenuto.
È meglio non usare più la bilancia reale; se necessario, si possono mimare le situazioni. È opportuno che gli alunni si abituino a lavorare in modo consapevole con i loro modelli mentali. In questo modo si evita il problema – ben noto in letteratura – della formazione di stereotipi attraverso un uso troppo prolungato di metafore (la bilancia a piatti, i diagrammi a blocchi o i grafi ad albero nella soluzione dei problemi).

18. L’altezza di Alvise

Alvise appoggia sul tavolo, alto 70 centimetri, uno sgabello alto 30 centimetri e ci sale sopra. In questo modo è alto come suo padre che ha una statura di 1,80m.
Rappresenta la situazione in modo da trovare l’altezza di Alvise.

(quinta elementare)
Si confrontano una rappresentazione ‘algebrica’:
a = altezza di Alvise
70 + 30 + a = 180
100 + a = 180 applicazione della proprietà associativa
a + ~~100~~ – ~~100~~ = 180 – 100 primo principio e cancellazione
a = 80
con una soluzione ‘aritmetica’:
30 + 70 = 100
180 – 100 = 80
Il confronto permette di chiarire la correttezza di entrambe soluzioni ma contemporaneamente consente di sottolineare la maggiore efficacia della prima delle due perché è fruttuosa anche nel caso in cui i dati numerici non siano così semplici e le operazioni così immediate[32]

Commenti

[31] Da un punto di vista strettamente matematico il confronto consente di far comprendere l’uguaglianza di espressioni - relative al calcolo di una medesima quantità – elaborate secondo percorsi diversi.

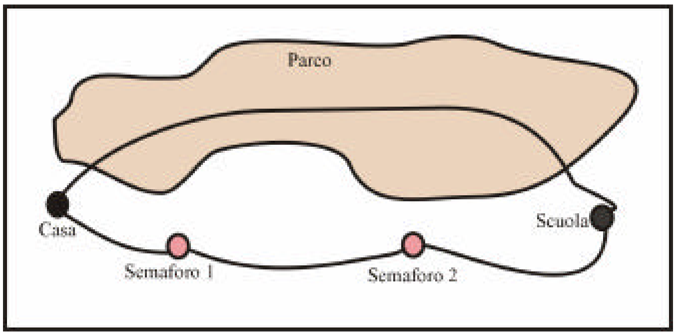
[32] Le rappresentazioni e le soluzioni proposte dagli alunni vanno confrontate e discusse collettivamente, in modo da accertarsi che la ‘a’ significhi ‘altezza di Alvise’ e non ‘Alvise’ e che vi sia la consapevolezza in merito ai passaggi dell’equazione.
Non è infrequente che compaia una rappresentazione del tipo:

a + 70 + 30 = p

dove ‘p’ sta per ‘altezza del padre’. In sé è un modo corretto di esprimere la relazione fra l’altezza di Alvise e quella di suo padre, ma è improduttiva ai fini della risoluzione del problema (determinazione dell’altezza di Alvise). Questa ‘ebbrezza da simbolo’ compare anche in alunni più grandi, quando la lettera è ancora, essenzialmente, un ‘indicatore’ e non ha ancora acquisito un significato strumentale alla soluzione del problema. Va sottolineato che la conquista del ‘giusto’ modo di guardare alle relazioni e di utilizzare le lettere è molto lenta e richiede una grande abilità da parte dell’insegnante nel guidare le riflessioni degli allievi. È opportuno ricordare quindi la necessità che questo passaggio vada affrontato con grande gradualità (v. balbettio algebrico).

19. Fabio e Elena vanno a scuola

Elena e Fabio per andare a scuola seguono due strade diverse che hanno però la stessa lunghezza di 450m.
Elena va a piedi attraverso il parco. Fabio invece, che usa la bicicletta, oltrepassa due semafori e poi ha ancora 100m da percorrere.
I due primi tratti della strada di Fabio sono uguali.
Rappresenta la situazione in modo da trovare la loro misura.



s + s + 100 = 450

s + s + $\cancel{100}$ = $\cancel{100}$ + 350 — scomposizione e cancellazione

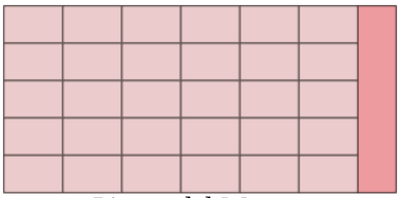
s + s = 350

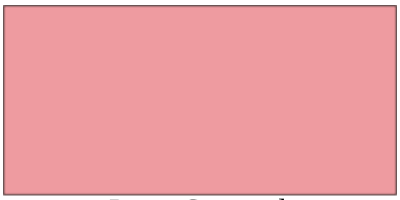
2s[33] = 350 — secondo principio della bilancia

2s : 2 = 350 : 2 s = 175

20a. La piazza e il parco (per quinta elementare e prima media)

I luoghi rappresentati nei due disegni hanno la stessa area di 330 metri quadrati.
Piazza del Mercato è divisa in zone quadrate uguali ognuna delle quali ospita una bancarella. Lungo il suo lato destro c'è un giardinetto di 60 metri quadrati.
Rappresenta la situazione in modo da trovare quanto misura ognuna delle zone quadrate.


Piazza del Mercato


Parco Comunale

Una soluzione[34] (a = area di una zona quadrata

30 × a + 60 = 330

30 × a + $\cancel{60}$ – $\cancel{60}$ = 330 – 60 — principio di cancellazione

30 × a = 270

30 × a : 30 = 270 : 30 — secondo principio della bilancia

a = 9

[33] Il passaggio dalla rappresentazione additiva a quella moltiplicativa è preferita da molti alunni

[34] Fra la quinta elementare e la prima media le rappresentazioni in genere sono molto differenziate; è lo spirito stesso con cui viene condotta questa attività che conduce a soluzioni creative, comunque preziose, giuste o sbagliate che siano, nel quadro del balbettio algebrico. Alcuni esempi:
Scritture corrette di tipo additivo:
a + a + …+ a + a + a + 60 = 330
Scritture con errori sintattici (con perdita di controllo del significato del processo).
Due esempi:
b × 30 + 60 = 330
b × $\cancel{30}$ + $\cancel{60}$ = $\cancel{30}$ + $\cancel{60}$ + 240
b = 240

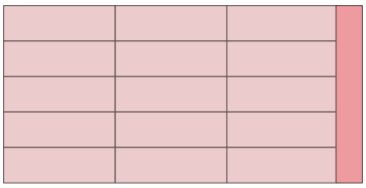
60 + 30b = 330
60 + $\cancel{30b}$ + 300 + $\cancel{30}$
60 + 300
300 : 6 = 50
In queste situazioni è fondamentale il ruolo dell'insegnante, che deve aiutare a contrapporre l'analisi delle procedure all'atteggiamento frequente 'è tutto sbagliato' perché il risultato non è quello atteso.

Attività adatte alle classi	1	2	3	4	5	**1**	**2**	**3**	Commenti

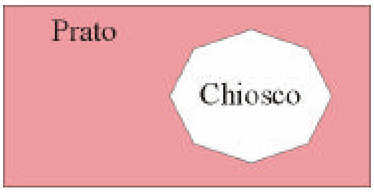
20b. La piazza e il parco (due varianti per classi di scuola media)

1)

I luoghi rappresentati nei due disegni hanno la stessa area.
Piazza del Mercato è divisa in zone rettangolari uguali ognuna delle quali ospita una bancarella. Lungo il suo lato destro c’è un giardinetto che misura 50 metri quadrati.
Il Parco Comunale è formato da un prato avente una superficie di 255 metri quadrati e da un chiosco ottogonale che occupa un’area che supera di 15 metri quadrati quella del giardinetto della Piazza del Mercato.
Rappresenta la situazione in modo da trovare quanto misura ognuna delle zone rettangolari.



Piazza del Mercato



Parco Comunale

Una soluzione (a = area di una zona rettangolare):

$15 \times a + \cancel{50} = 255 + \cancel{50} + 15$ cancellazione

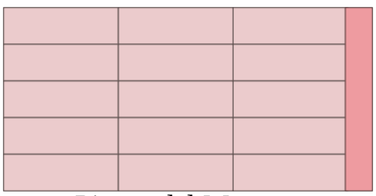
$15 \times a = 270$

$15 \times a : 15 = 270 : 15$ secondo principio

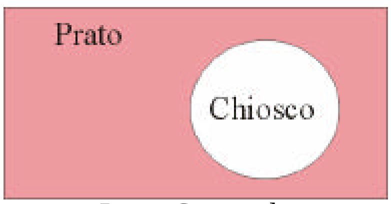
$a = 18$

2)

I luoghi rappresentati nei due disegni hanno la stessa area.
Piazza del Mercato è divisa in zone rettangolari uguali ognuna delle quali ospita una bancarella. Lungo il suo lato destro c’è un giardinetto che misura 50 metri quadrati.
Il Parco è formato da un prato avente una superficie di 254 metri quadrati e da un chiosco a pianta circolare che occupa una superficie tripla di quella di una zona rettangolare della Piazza del Mercato.
Rappresenta la situazione in modo da trovare quanto misura ognuna delle zone rettangolari.



Piazza del Mercato



Parco Comunale

Una soluzione (a = area di una zona rettangolare):

$15a + 50 = 254 + 3a$

$15a + \cancel{50} = 204 + \cancel{50} + 3a$ scomposizione e cancellazione

$12a + \cancel{3a} = 204 + \cancel{3a}$ scomposizione e cancellazione

$12a = 204$

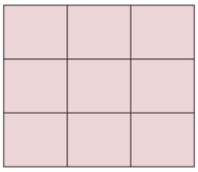
$12a : 12 = 204 : 12$ secondo principio

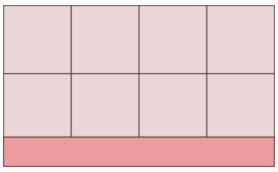
$a = 17$

Attività adatte alle classi	1	2	3	4	5	1	2	3	Commenti

21. I due giardini

Il Giardino di Pinocchio e il Giardino di Alice hanno uguale area e sono divisi in aiuole.
L’area dell’aiuola lunga nel giardino di Alice è di 70 m^2.
Rappresenta la situazione in modo da trovare l’area di una delle aiuole quadrate (uguali fra loro).





Soluzioni corrette di alunni di quinta elementare e prima media[35]

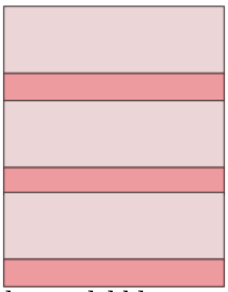
(a) $9g = 8g + 70$ [per l’alunno g = a, ndr]
$\cancel{8g} + g = \cancel{8g} + 70$ scomposizione e principio di cancellazione
$g = 70$

(b) $\cancel{a} + \cancel{a} + \cancel{a} + \cancel{a} + \cancel{a} + \cancel{a} + \cancel{a} + \cancel{a} + a = \cancel{a} + \cancel{a} + \cancel{a} + \cancel{a} + \cancel{a} + \cancel{a} + \cancel{a} + \cancel{a} + 70$
$a = 70$

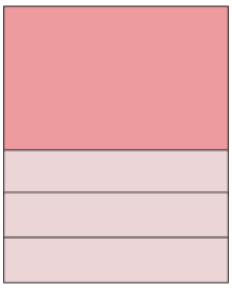
(c) $9 \times p = 8 \times p + 70$[36]

22. Le torri

In una scuola materna i bambini hanno costruito due torri di uguale altezza con dei blocchi di plastica di colore diverso (a colori uguali corrispondono blocchi uguali).
Il blocco più scuro è alto 48cm.
Rappresenta la situazione in modo da trovare l’altezza di ognuno dei tre blocchi sottili della torre di sinistra.



a = altezza del blocco medio



b = altezza del blocco basso

$\cancel{3a} + 3b = 48 + \cancel{3a}$ principio di cancellazione
$3b = 48$
$3b : 3 = 48 : 3$ secondo principio della bilancia
$b = 16$

---

[35] *Talvolta, come si è già evidenziato, le soluzioni proposte dagli alunni sono espresse in linguaggio non algebrico. Ad esempio, due soluzioni di quinta elementare espresse in linguaggio verbale aiutano a capire come ‘risolvere un problema’ non significhi necessariamente ‘cercare operazioni’ e nemmeno ‘scrivere calcoli’.*

- *«Noto che il primo giardino è formato da nove aiuole quadrate e il secondo da otto aiuole quadrate e un’aiuola lunga. Siccome i due giardini hanno la stessa area, questo vuol dire che un’aiuola quadrata ha la stessa area di quella lunga, e cioè 70 m^2».*
- *«Pinocchio ha 9 aiuole. Alice ha 8 aiuole. 4 pezzi che valgono 1/4 di aiuola ognuno [l’alunna immagina l’aiuola lunga divisa in quattro parti uguali, ndr], sommandoli risulta un’aiuola ‘sconosciuta’ quindi tutte le altre aiuole sconosciute misurano 70 m^2».*

[36] *In questo caso l’alunno non ha saputo come continuare; la scrittura presenta probabilmente troppe difficoltà di tipo sintattico.*

22. *È probabile che si manifesti, soprattutto nelle quinte elementari e nelle prime medie, il fenomeno della persistenza semantica: gli alunni scrivono nelle loro equazioni i simboli o le lettere disposti con lo stesso ordine dei blocchi nelle torri. Ecco un esempio derivante da una ‘lettura ‘dal basso verso l’alto’ (peraltro in sé corretto):*
$B + b + B + b + B + b = B + B + B + 48$
Nelle stesse l’equazione
$3a + 3b = 48 + 3a$
potrà essere il punto d’arrivo di attività di *negoziazione dell’identità di significato fra le scritture:*
$a + a + a = 3a$
$b + b + b = 3b$
(v. commenti della situazione ***10*****).**

Attività adatte alle classi	1	2	3	4	5	1	**2**	**3**	Commenti

Quinta fase

Si propone una nuova serie di problemi verbali algebrici; sono più complessi dei precedenti anche perché sono privi di quel supporto iconico che favorisce la visualizzazione delle relazioni fra i dati.
L’insegnante può gestire questa fase con grande libertà, attraverso soluzioni collettive seguite (o alternate) a soluzioni individuali (o di gruppo) successivamente poste a confronto e discusse dalla classe. I problemi possono essere scelti e proposti in modo diluito per valutare la crescita nel grado di autonomia e nella padronanza degli aspetti concettuali e di quelli procedurali. I problemi sono molto ricchi di implicazioni (che verranno di volta in volta commentate) e si prestano a riletture di concetti, arricchimenti di competenze, ampliamenti, approfondimenti. La fase è molto significativa perché comporta un salto di qualità nell’elaborazione del balbettio algebrico, ponendo gli alunni di fronte ad un progressivo affinamento di conoscenze che, pur continuando ad arricchirsi in modo ancora ingenuo, creativo, fortemente esplorativo, contemporaneamente si rinforzano in un crescente consapevole rispetto di regole e convenzioni. Ancora una volta, l’obiettivo principale è quello di favorire la ricerca delle condizioni per la rappresentazione del problema, imparando ad allontanare quella che si potrebbe definire la ‘sindrome da risultato’.
Nell’affrontare un problema, prima di tutto gli alunni devono capire se ci sono le *condizioni di equilibrio*, ossia se il problema è risolvibile con un'equazione. Devono:

- individuare i ‘piatti della bilancia’ (i due membri dell’equazione);
- riconoscere i ‘pesi’ (i valori numerici noti e quelli incogniti):
- rappresentare la situazione;
- applicare proprietà e princìpi e risolvere l'equazione.

23. I minerali

Il problema contiene due incognite ma una di esse, come nel problema della situazione **19**, non occorre determinarla (né è determinabile).

> Luigi ha ordinato su uno scaffale la sua collezione di minerali mettendo i 31 graniti in una scatola, i calcari in una seconda e i fossili in una terza.
> Poco dopo la sorella Iris, inavvertitamente, fa cadere a terra le scatole e i minerali si sparpagliano sul pavimento.
> Iris, che sa molto poco di minerali, mette 42 rocce insieme in una scatola e rimette sullo scaffale i fossili (gli unici che è capace di riconoscere).
> Rappresenta la situazione in modo da trovare quanti sono i calcari.

La difficoltà iniziale sta nel ‘vedere i due piatti’ che sono collocabili non nello spazio ma nel tempo: sono costituiti dalla disposizione dei minerali prima e dopo l’incidente. La situazione si può schematizzare:

prima dell’incidente
31 graniti   Calcari   fossili
Dopo l’incidente
42 minerali assieme   fossili

I minerali sono gli stessi, quindi si può stabilire l’uguaglianza:

$31 + c + v = 42 + v$ [37]

Quinta fase

[37] *È sempre opportuno far esplicitare i significati delle lettere usate:*

c = numero dei calcari
v = numero dei fossili

Non bisogna accettare:

c = calcari
v = fossili

perché questa scrittura può favorire il permanere della concezione delle lettere come ‘iniziali’ o come ‘segnaposto’.
La soluzione comporta difficoltà che gli alunni hanno già incontrato:
$31 + c + \cancel{v} = 42 + \cancel{v}$ *cancellazione*
$\cancel{31} - \cancel{31} + c = 42 - 31$ *I principio*
$c = 11$

Attività adatte alle classi	1	2	3	4	5	1	2	3	Commenti

24. I giochi con il computer

Il problema è analogo al precedente: una delle due incognite non è determinabile.

> Due amici fanatici dei giochi con il computer fanno a gara a chi riesce a procurarsene di più. Sandro ne aveva inizialmente 22 e un amico gli ha regalato un CD con dei giochi nuovi.
> Nicola invece è partito con 14 giochi, ha trovato un CD di giochi allegato ad una rivista di informatica e ha ricevuto anche lui dallo stesso amico un CD uguale a quello di Sandro.
> Ora i due amici hanno lo stesso numero di giochi.
> Rappresenta la situazione in modo da trovare quanti giochi c'erano nel dischetto allegato alla rivista.

In questo caso non c'è un 'prima' e un 'dopo'; i 'piatti' sono costituiti dalle due collezioni. La situazione si può schematizzare

collezione di Sandro

22 giochi — CD con giochi nuovi

collezione di Nicola

14 giochi — CD della rivista — CD con giochi nuovi (v. Sandro)[38]

Le collezioni hanno lo stesso numero di giochi, quindi si può stabilire l'uguaglianza

$$22 + x = 14 + x + y$$

[38] Si esplicitano i significati delle lettere:
x = numero dei giochi nuovi
y = numero dei giochi della rivista
La soluzione non è difficile:

$22 + \cancel{x} = 14 + y + \cancel{x}$ cancellazione
$22 - 14 = \cancel{14} - \cancel{14} + y$ I principio
$8 = y$

25. La festa di compleanno

Anche questo problema ha una struttura temporale: qualcosa che è accaduto in due momenti diversi 'prima' è uguale a qualcosa 'ora'. Un'incognita compare per due volte nel 'piatto' di sinistra.

> Roberto ha invitato gli amici alla sua festa di compleanno. Per evitare confusioni ha personalizzato con una decalcomania i bicchieri di plastica.
> Arriva un primo gruppetto di ragazzi e ognuno di loro sceglie il suo bicchiere.
> Più tardi arriva un secondo gruppo di amici; la mamma nota che sono esattamente il doppio di quelli del primo gruppo e dà anche a loro un bicchiere a testa.
> Alla fine della festa conta quindici bicchieri sporchi.
> Rappresenta la situazione in modo da trovare da quanti amici era formato il primo gruppo.
> Trova da quanti amici era formato il secondo

.
Si può schematizzare la situazione:

Primo gruppo	Secondo gruppo	Alla fine
x bicchieri	Doppio di bicchieri	15 bicchieri

Nessun bicchiere è sparito, quindi si può stabilire l'uguaglianza:

$$x + 2x = 15$$

Un esempio di soluzione corretta:

x = bicchieri presi dal primo gruppo

$x + 2x = 15$
$3x = 15$
$3x : 3 = 15 : 3$ II principio
$x = 5$

Attività adatte alle classi	1	2	3	4	5	1	2	3	Commenti

26. La raccolta di figurine

Anche questa situazione presenta uno sviluppo diacronico; compare una sola incognita.

> Leonardo ha cominciato una collezione di figurine.
> All'inizio aveva 23 figurine da attaccare sull'album e ha ricevuto in regalo tre nuovi pacchetti. Ora ha 44 figurine.
> Rappresenta la situazione in modo da trovare quante figurine c'erano in ogni pacchetto.

La situazione comporta un aspetto molto delicato evidenziato da questo diario (prima media):

> Si schematizza la situazione:
>
> | all'inizio | regalo | ora |
> |---|---|---|
> | 23 figurine | 3 pacchetti | 44 figurine |

> Gli alunni si bloccano perché pensano di aver a che fare con due incognite che chiamano, in un gergo che non aiuta, 'i pacchetti' e 'le figurine'[39].
> L'analisi dello schema porta a capire che in realtà il pacchetto non è un'incognita, ma il 'contenitore dell'incognita' (il numero delle figurine). In questa prospettiva si può scrivere:
> x = numero di figurine in un pacchetto
> Si comprende quindi che il significato matematico di '3 pacchetti' è:
> 'numero di figurine in un pacchetto' per 'numero dei pacchetti'[39]
> v Si chiede di rappresentare la situazione per Brioshi.

> (a) $3 \times x$ (b) $x \times 3$ (c) $3x$
> La discussione porta a scegliere la rappresentazione (c).
> Si può quindi stabilire l'uguaglianza:
> $$23 + 3x = 44$$ [40]

27. Il campeggio

È un problema ad una sola incognita. Compare la stessa difficoltà del problema precedente: la tenda va vista in relazione al numero incognito dei suoi posti letto.

> Rita e Gabriella sono andate a trascorrere le vacanze in due campeggi di scouts.
> Il campeggio di Rita è formato dalla sua tenda da 6 posti e da altre 4 tende diverse dalla sua, ma uguali fra loro.
> Nel campeggio di Gabriella ci sono 54 ragazzi come in quello di Rita.
> Rappresenta la situazione in modo da trovare quanti posti contiene ognuna delle quattro tende uguali del campeggio di Rita.

Si può schematizzare la situazione:

Campeggio di Rita		Campeggio di Gabriella
1 tenda a 6 posti	4 tende a n posti	54 ragazzi

n = numero dei ragazzi in una tenda.

Si scrive l'uguaglianza: $6 + 4n = 54$[41]

[39] La situazione illustrata è frequente; può darsi però che in seconda o terza media, con un percorso algebrico alle spalle, questa difficoltà non si presenti.

[40] Due esempi di soluzione corretta:

$23 + 3x = 44$	
$\cancel{23} + 3x - \cancel{23} = 44 - 23$	*I principio*
$3x = 21$	
$3x : 3 = 21 : 3$	*II principio*
$p = 7$	

$23 + 3x = 44$	
$23 + 3x = 23 + 21$	*scomposizione*
$\cancel{23} + 3x = \cancel{23} + 21$	*I princ. (cancellaz.)*
$3x = 21$	
$3x : 3 = 21 : 3$	*II principio*
$p = 7$	

[41] Un esempio di soluzione corretta:

$6 + 4n = 54$	
$\cancel{6} + 4n - \cancel{6} = 54 - 6$	*I principio*
$4n = 48$	
$4n : 4 = 48 : 4$	*II principio*
$n = 12$	

Se il concetto di 'contenitore dell' incognita' non è chiaro possono comparire scritture del tipo

$$t + 4t = 54$$

"t" indica ancora l'oggetto e non il numero

Nota

Si ritiene opportuno riassumere i passi significativi dal punto di vista algebrico presenti nella soluzione dei problemi ***26*** *e* ***27****:*

- *si assegna un nome al numero di figurine in un pacchetto (es: f) o di posti in una tenda (es: p);*

utilizzando il legame fra il numero delle bustine (o delle tende) e quello delle figurine (o dei posti) si esplicita il numero totale delle bustine ($3 \times f$, o $3f$, o $f \times 3$) e quello delle tende ($6 \times p$, o $6p$, o $p \times 6$).

Attività adatte alle classi	1	2	3	4	5	1	2	3	Commenti

28. La paghetta di Federica

La difficoltà in questo caso è rappresentata dal fatto che l’incognita compare in entrambi i membri; l’individuazione dei due termini (i ‘piatti’) è più laboriosa.

> Mercoledì Federica ha fatto dei piccoli lavori in casa e la mamma le ha regalato dei soldi come premio.
> Giovedì Federica l'ha aiutata di nuovo ed è stata proprio brava, e la mamma le ha dato 12000 lire. Aggiungendo questi soldi a quelli ricevuti mercoledì, Federica ottiene come risultato il triplo dei soldi che aveva guadagnato la prima volta.
> Rappresenta la situazione in modo da trovare quanti soldi ha dato mercoledì la mamma a Federica.

Se necessario, si può aiutare a capire meglio la situazione ponendo domande come «Cosa è successo mercoledì?» «E poi giovedì?» «E ora quanti soldi ha Federica?» e così via.
La situazione è più leggibile se la si rappresenta per gradi:

soldi presi mercoledì + 12000 = soldi presi in tutto
soldi presi in tutto = triplo dei soldi presi mercoledì

Queste frasi si possono tradurre in linguaggio matematico in un sistema di equazioni:

(i) $s + 12000 = t$
$t = 3s$

La sostituzione conduce ad un’unica equazione

(ii) $s + 12000 = 3s$[42]

29. Le tessere telefoniche

La struttura matematica è la stessa del problema precedente.

> Due fratelli, Susanna e Martino, fanno raccolta di tessere telefoniche e, confrontando le loro collezioni, scoprono di avere lo stesso numero di tessere.
> Susanna ha una busta con tessere francesi e 33 tessere inglesi.
> Martino conta le sue e scopre che, in tutto, esse sono quattro volte quelle francesi della sorella.
> Rappresenta la situazione in modo da trovare quante sono le tessere nella busta di Susanna.

Un esempio di soluzione corretta (n = numero delle tessere francesi):

$n + 33 = 4n$
$\cancel{n} + 33 - \cancel{n} = 4n - \cancel{n}$ I principio
$33 = 3n$
$33 : 3 = 3n : 3$ II principio
$11 = n$[42]

Commenti

[42] *Un esempio di soluzione corretta:*
$s + 12000 = 3s$
$\cancel{s} - \cancel{s} + 12000 = 3s - s$ *I principio*
$12000 = 2s$
$12000 : 2 = 2s : 2$ *II principio*
$6000 = s$
Ci si può fermare a questa scrittura, lasciando l’incognita a destra dell’uguale ma vale la pena anche ricordare agli alunni che, siccome le due parti dell’equazione sono simmetriche, si può scrivere:
$s = 6000$.
L’abitudine di collocare la lettera a sinistra finisce per prevalere. Si può addurre anche una ragione di natura linguistica: è più comune dire
‘il valore dell’incognita è 11’
piuttosto che
’11 è il valore dell’incognita’
allo stesso modo che nel linguaggio comune dire
‘‘il colore del cappello è rosso’
è più comune di
‘rosso è il colore del cappello’.
Naturalmente, come sul piano linguistico,anche sul piano matematico le due espressioni sono equivalenti.

Nota

*Nel problema della situazione **28** il passaggio da (i) a (ii) comporta la sostituzione di ‘t’ con ‘3s’. Si tratta di un passaggio logico che per alcuni allievi potrebbe non risultare così semplice da capire. Si può attivare una strategia che ne favorisca la comprensione attraverso la metafora del ‘gioco del cambio’ (v. Malara e Gherpelli, 1999).*

Attività adatte alle classi	1	2	3	4	5	1	2	3	Commenti

30. Giochi della gioventù

In una scuola alle gare di nuoto dei Giochi della gioventù si sono iscritti sia femmine che maschi, ma il numero di questi ultimi è un terzo di quello delle ragazze.
Il numero dei partecipanti alle gare di nuoto è uguale a quello dei partecipanti alle gare di corsa: in entrambe ci sono 52 concorrenti.
Rappresenta la situazione in modo da trovare quante sono le femmine iscritte alle gare di nuoto.

Espansione

Con alunni di terza media si potrebbe costruire un embrione di sistema:

m + f = 52
m = ? f

oppure

m + f = 52
f = 3m

e procedere poi con le sostituzioni.
È evidente che per la maggior parte degli studenti il secondo sistema riveste minori difficoltà del primo che peraltro rappresenta con maggiore fedeltà la situazione descritta nel testo.

30. Questo problema può essere rappresentato in modi diversi, a seconda delle competenze degli alunni nel campo delle frazioni e del punto di vista attraverso il quale viene considerata la relazione fra le quantità in gioco. Ecco alcuni protocolli commentati di alunni di quinta elementare:
(a) f + f/3 = 52
Strada difficile se non si sa operare con i numeri frazionari; spesso gli alunni che la propongono si bloccano oppure modificano strategia:
(b) f + f : 3 = 52
Strada ancora più complessa; di frequente induce l'errore di applicare il secondo principio e dividere entrambi i membri per 3.
(c) 3m + m = 52
4m = 52
4m : 4 = 52 : 4
m = 13
Il punto di vista che inverte la relazione è spesso risolutore anche se non è molto frequente; è interessante 'provocarlo' (semplifica molto la soluzione)

31. La ricerca di fossili

Due gruppi di studenti, separatamente l'uno dall'altro, sono impegnati a cercare fossili fra le rocce di un fiume.
Il secondo gruppo è più sfortunato perché trova esattamente la metà dei fossili trovati dal primo.
Dopo qualche ora i due gruppi si riuniscono e mettono in comune i fossili che hanno trovato. Complessivamente hanno raccolto 36 fossili.
Rappresenta la situazione in modo da trovare quanti sono quelli trovati dal gruppo più fortunato.

Un esempio di soluzione corretta:
f + f + f = 36
3f = 36
3f : 3 = 36 : 3
f = 12
Un interessante embrione di sistema di due equazioni a due incognite (terza media):

36 = A + B;   A = 2B
36 = 2B + B
36 = 3B
3B = 36
3B : 3 = 36 : 3
B = 12

31. Alcuni esempi di equazioni corrette e di strategie attivate autonomamente per risolverle:

(d) L'autore scrive
A + A : 2 = 36
non sa come continuare e ricomincia:
½A + ½A + ½A = 36
$^3/_2$A = 36
$^3/_2$A : 3 = 36 : 3
A = 12

(e) l'alunno, a seconda delle difficoltà, alterna rappresentazioni moltiplicative e additive:

2f + f = 36
f + f + f = 36
3f : 3 = 36 : 3
f = 12

Scheda di valutazione

Competenza ottimale: *l'alunno usa le lettere in modo consapevole per:*

1) *rappresentare correttamente la situazione problematica (equazione),*
2) *risolvere l'equazione applicando correttamente proprietà e princìpi.*

L'alunno

1: usa simboli **iconici**

- semanticamente significativi (segmenti per strade, quadrati per aiuole)
- semanticamente non significativi (rettangoli, triangoli, asterischi, ecc.)
- ridondanti, particolareggiati, superflui, …

per impostare una rappresentazione

- corretta ('pseudo-equazione': v. colonna dei Commenti)
- come supporto efficace ma 'esterno' rispetto alla soluzione
- come supporto corretto ma 'muto' di significati
- sbagliata
- non usa nessuna rappresentazione

2: usa simboli **letterali**

- semanticamente significativi ('a' per 'aiuola', 's' per 'siepe', ecc.)
- semanticamente non significativi (lettere qualsiasi).

in modo

- corretto (imposta l'equazione)
- confuso
- sbagliato (uso inconsapevole)
- non usa le lettere

per impostare un'equazione

- chiara e corretta come uguaglianza fra quantità
- non del tutto corretta
- approssimativamente corretta
- sbagliata
- non sa impostare un'equazione

3: applica la scomposizione ragionata di un numero

- in modo corretto ed evidenziato
- in modo evidenziato ma commettendo errori non gravi nei calcoli
- in modo confuso (qualche volta la evidenzia e qualche volta no)
- in modo sbagliato
- non la sa applicare

4: esplicita la cancellazione

- in modo chiaro e corretto
- correttamente ma senza evidenziare la scomposizione del numero
- in modo non del tutto corretto
- in modo sbagliato
- non usa la cancellazione

5: usa le parentesi

- correttamente
- scorrettamente

Commenti

Scheda di valutazione

Si tratta di un'ipotesi da sottoporre a verifica; rappresenta una traccia per l'osservazione degli alunni basata sulle esperienze condotte nelle classi.

1

• Questa voce comprende anche rappresentazioni ingenue, estranee al linguaggio algebrico (possono comparire, soprattutto nelle fasi iniziali dell'attività con la bilancia)
• Con il termine 'pseudo-equazione' (mutuato dal ricercatore Da Rocha Falcâo) si intende una rappresentazione spontanea dell'alunno che, anche se non è un'equazione nel senso ortodosso del termine, evidenzia un sostanziale embrione di pensiero algebrico. La pseudo-equazione acquista grande importanza didattica soprattutto con gli alunni più giovani.
• È importante cogliere l'eventuale presenza della persistenza semantica)

2

Non è opportuno fissare l'attenzione degli alunni sull'uso di lettere particolari; gli aspetti convenzionali del linguaggio algebrico si chiariscono gradualmente nel tempo.

5

Ci si riferisce all'uso delle parentesi tonde in casi come: (a + a + a) : 3