Riflessioni generali sulle prove d'esame *'Ricerca di leggi di corrispondenza – Sequenza numerica:4-11-18...'* nella prospettiva di un approccio anticipato al pensiero algebrico sulla base dei materiali del Progetto ArAl

Giancarlo Navarra

Scena prima
L'insegnante propone la seguente sequenza numerica:

4 -11 -18 - ...

L'obiettivo dell'attività è di indurre gli allievi ad esplorare i legami tra un certo numero della sequenza e quello del suo posto in modo da trovare una o più rappresentazioni che possano essere generalizzabili.

Questione 1
Immaginando di essere voi gli insegnanti di questa classe, illustrate il percorso che intendete seguire e ipotizzate le difficoltà che gli alunni possono incontrare.

Osservazione iniziale

1.A.
Potrebbe forse essere più semplice con qualche numero in più.

Come continua?

1.B.
I ragazzini potrebbero in un primo momento intendere quei puntini come la ricerca del singolo numero successivo a 18 e quindi potrebbero completare con il 25 e non andare oltre. Questo dimostra che hanno capito come passare da un numero all'altro ma si fermano lì.

1.C.
... Io chiederei: “Ma se vi dico 38, sapete quale numero viene dopo questo nella sequenza?”

38 non fa parte della sequenza. È opportuno verificare che il numero che si propone sia veramente uno dei termini della successione. Nel caso non lo sia, questo potrebbe diventare un problema interessante da esplorare, chiarendo il presupposto che la successione è formata solo da numeri naturali.

L’individuazione di ‘+7’

1.D.

... li sfiderò poi con posizioni più alte: per esempio quale numero potrebbe esserci al 23° posto...

[Lasciando lavorare i ragazzi si suppone che qualcuno (di fascia bassa) si scriva tutte le sequenza per arrivare al risultato. Questo consente quindi anche agli alunni più deboli di partecipare attivamente alla lezione.]

... In questo modo saranno abbattuti dal sommare così tante volte il numero 7 e inizieranno a cercare una strategia più veloce. Qui potrebbero sorgere le difficoltà per gli studenti, i quali non riusciranno a rappresentare la regolarità. Potrei indirizzarli a scrivere i numeri in forma non canonica esplicitando il fatto che ogni volta si aggiunge 7... così sarà più facile per loro notare che a 4 si devono aggiungere tanti 7, quanti ne indica il posto, meno 1...

[Le difficoltà alla generalizzazione saranno commisurate a quanto lavoro pre algebrico la classe ha affrontato in precedenza soprattutto relativamente alle diverse rappresentazioni di un numero.]

... Non dovrebbe essere difficile notare la relazione tra il numero di posto e il numero di volte per cui moltiplico 7...

La formula $4+7\times n$

1.E.

4	→	4+7	→	4+7+7	→	4+7+7+7	→	...
4	→	4+7	→	4+7×2	→	4+7×3	→	...

In questo modo dovrebbe essere più semplice arrivare ad una generalizzazione, notando che restano costanti, o potrei anche dire "fermi", i numeri 4 e 7, mentre cambia il numero che viene moltiplicato per 7, e potrebbe essere sostituito con una generica lettera. ... $4+7\times n$.

1.F.

n.posizione	n. sequenza			
1	4	4	4	4
2	11	4+7	4+7	4+7
3	18	11+7	4+7+7	4+(7×2)

Riesce spontaneo ‘vedere’ 4+(7×2) ma è più difficile (anche per l'insegnante) ‘vedere’ 4+(7×1) e 4+(7×0) rispettivamente come rappresentazioni dei primi due termini, e cioè:

n.posizione	n. sequenza			
1	4	4	4	4+(7×0)
2	11	4+7	4+7	4+(7×1)
3	18	11+7	4+7+7	4+(7×2)

La ‘tabellina del 7 traslata’. La formula 7×n-3

1.G.

... Sembra in pratica una tabellina del 7 che però inizia con il 4 in posizione 1.

		1	2	3		
		↓×7	↓×7	↓×7		
7n	→	7	14	21		
		↓-3	↓-3	↓-3		
?	→	4	11	18		
		(1×7-3)	(2×7-3)	(3×7-3)	→	**7n-3 n×7-3**

L'ultimo passaggio è da adulti perché le due rappresentazioni finali sono sì equivalenti ma l'equivalenza va fatta conquistare attraverso il confronto. Non è così immediato.

Pari e dispari

1.H.

... Chiederei quindi di analizzare la sequenza 4, 11, 18, 25, ... e di fare delle osservazioni. Probabilmente la richiesta non sarà chiara a tutti, quindi aiuterò chiedendo se il numero al 6° posto è pari o dispari. Allora molti osserveranno che è dispari e che tutti i numeri che si trovano in un p. pari sono dispari, così come i numeri di p. dispari sono pari. Ma come faccio a dirlo? Devo in qualche modo giustificarlo. ... L'importante è individuare una formula da poter spedire a Brioshi.

1	*2*	*3*	*4*
4	*11*	*18*	*25*
	4+7	*4+7+7*	*4+7+7+7*
	4+7×1	*4+7×2*	*4+7×3*

Si può pervenire a più definizioni:
(a) I numeri ai posti dispari sono somme fra 4 e multipli pari di 7.
(b) I numeri ai posti pari sono multipli dispari di 7 aumentati di 4.
(c) I numeri della successione sono multipli di 7 aumentati di 4.

Immaginare dialoghi

1.I.

Immaginando di essere io l'insegnante... per semplicità scrivo alcune delle possibili risposte:
Elisa: C'è sempre un numero pari e poi un numero dispari.
Luca: Già è vero, al posto 2 c'è 11 che dispari.
Elisabetta: Io ho trovato che la differenza fra 11 e 4 è 7.
Giulia: Però se faccio uno, il posto, più uno poi per sette e tolgo 10 ho fatto bene no?
...

La formula n=4+7×(x-1)

1.J.

Se x è il posto e n è il numero della sequenza, $\boxed{n=4+7\cdot(x-1)}$.

Lo studente inizia con questa formula; la sua preoccupazione non è rivolta agli aspetti didattici dell'attività che la deve precedere in classe (il processo), ma riflette le sue stesse difficoltà, che lo conducono alla scrittura diretta del prodotto come se questa fosse la soluzione del suo compito (in quanto studente)

... Poi azzererei la difficoltà chiedendo cosa accadrebbe se il primo numero fosse 0; spero di giungere a una sequenza del tipo 0, 7, 14, 21,... riproponendo nella tabella precedente:

(P) posto	1	2	3	4
(N) Numero	0	7	14	21

mi aspetto che qualcuno individui la relazione N=7×(P-1).

Lo studente prosegue mettendo in relazione le due successioni:

	1	2	3	4
Sequenza 1	0	7	14	21
Sequenza 2	4	11	18	25

e scrivendo:

Se qualcuno avrà l'intuizione di capire che semplicemente la sequenza 2 è ‘traslata’ da 4, si potrebbe arrivare al legame corretto.

Una riflessione conclusiva.
Molti hanno individuato 7×n-3 (n=numero d'ordine).

1	*2*	*3*	*4*
4	*11*	*18*	*25*
	7×2-3	*7×3-3*	*7×4-3*

Che si generalizza in:

$$(1) \quad a_n=p\times n-3$$

Altri (o anche gli stessi) hanno individuato un'altra legge:

$$(3) \quad a_n=a_1+(n-1)\times 7$$

In termini ancora più generali (p=passo - ragione) diventa:

$$(4) \quad \boldsymbol{a_n=a_1+(n-1)\times p}$$

Consideriamo ora un'altra successione, di passo 4:

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	...
5	*9*	*13*	*17*	*21*	*25*	...

Particolarizzando la (4), il termine alla settima posizione sarà:

$$a_7=5+(7-1)\times 4=5+6\times 4=5+24=29$$

Applichiamo allo stesso settimo termine la formula (1);

$$a_7=4\times 7-3=28-3=25$$

Ma 25 non è il termine corretto nella settima posizione (29).
La formula è solo apparentemente generale; *il '-3' la rende* locale. *Bisognerebbe, ogni volta, cercare il valore da sostituire a '-3'.*
Lo stesso vale anche per la legge 2 della Scena Seconda, che generalizzata diventa:

$$(5) \quad a_n=p\times(n+1)-10$$

Difficoltà

1.K.

Purtroppo, per quanto sia semplice, mi trovo in difficoltà. Non riesco a distogliermi da una visione "sagittale unidirezionale" per cui nella mia mente l'unica cosa che vedo è:

4 —+7→ 11 —+7→ 18 —+7→ 25 —+7→ ...

e non riesco a fare il confronto con il numero di posto. Immagino che questo difficoltà possa essere comune anche negli alunni. Le rappresentazioni canoniche in forma additiva non mi hanno aiutato. Quindi (incredibile ma vero, sto andando per tentativi!) Provo ad introdurre quella moltiplicativa. Per cui: ...

Alla fine del suo ragionamento lo studente giunge alla rappresentazione n=p×4-3. Poi continua:

L'alunno potrebbe trovare difficoltà perché, pur semplice, la relazione presenta la composizione di un prodotto con un fattore ‘non standard’ che è 7 (invece del classico doppio, triplo...) e di una sottrazione. Si potrebbe provare a rappresentare con gli insiemi per vedere se è più chiaro... Non credo. La soluzione migliore resta la tabella.

1.L.

Chiederei di completare il termine mancante ... chiederei di proseguire fino a scrivere i primi 10 termini della successione in linea orizzontale. Quindi chiederei di proseguire, andando a capo, fino al ventesimo termine. Fino a cioè ad ottenere

4 11 18 25 32 39 46 53 60 67
74 81 88 95 102 109 ...

... I ragazzi dovrebbero essere condotti ad accorgersi che, per ogni coppia, la cifra dell'unita rimane la stessa ... e che la differenza tra le varie coppie è costante:

74-4=81-11=88-18=...=70

... se ad ogni termine della tabellina del 7 si aggiunge 4 si ottiene la stessa successione *(e il primo termine?)*

1.M.
Attraverso una serie di ragionamenti successivi formula due leggi:

$$7 \times n+4 \qquad e \qquad 7 \times n-3$$

Se sostituiamo ad n i numeri d'ordine dei posti a partire da 1:

$7 \times 1+4=\mathbf{11}$ $7 \times 2+4=\mathbf{18}$ $7 \times 3+4=\mathbf{25}$
$7 \times 1-3=\mathbf{4}$ $7 \times 2-3=\mathbf{11}$ $7 \times 3-3=\mathbf{18}$

Si trova che le due successioni sono differenti. Solo la seconda pone in relazione i numeri con le loro posizioni.

Questione 2
Illustrate brevemente le ragioni per le quali la ricerca di regolarità costituisce uno dei campi d'esperienza più importanti per la costruzione del pensiero algebrico.

La ricerca di regolarità comporta la ricerca delle relazioni fra i numeri in gioco (in questo caso i numeri della successione e il numero d'ordine della loro posizione). Rappresentare le relazioni in linguaggio matematico significa esplicitare la struttura della successione e quindi di introdurre il concetto di modellizzazione.

Scena seconda
Gli alunni formulano individualmente delle ipotesi. Attraverso il confronto collettivo ne selezionano due che vengono trascritte alla lavagna in linguaggio matematico e in linguaggio naturale:

	4	11	18	25	32	39
(1)	+7	+7	+7			
(2)	$7\times2-10$	$7\times3-10$	$7\times4-10$	$7\times5-10$	$7\times6-10$	$7\times7-10$

Legge1: Bisogna aggiungere 7
Legge2: Moltiplico per 7 poi tolgo 10

L'insegnante guida la classe alla riflessione sulle proposte favorendo la concentrazione sulla seconda.
Gli alunni la analizzano e la verificano, aggiungendo numeri alla successione: 46, 53, 60, 67.

Questione 3
Analizzate e commentate le due leggi.

- *Per la prima legge soltanto uno ha usato il termine 'ricorsivo'.*
- *Dovrebbe risultare chiaro dalla consegna che la seconda legge non è stata proposta dall'insegnante ma è stata elaborata da un gruppetto di alunni i quali, attraverso tentativi e intuizioni, l'hanno individuata.*
- *Molti esplicitano la legge non in termini di uguaglianza ma scrivendo solamente il predicato. Ad es:*
  $4+7\times(n-1)$ *e non* $a=4+7\times(n-1)$

Individuazione di incompletezze nelle Leggi

3.A.

La prima legge è poco chiara nella sua formulazione, al + 7 scritto tra gli spazi e secondo me poco utile; forse il docente poteva negoziare meglio questa legge arrivando a scriverla: "Per ottenere il numero successivo dobbiamo sommare sette al precedente".

3.B.

Ad essere sincera alla seconda legge non avevo neanche pensato, forse per la fretta... Non mi convince molto la traduzione in linguaggio naturale: "moltiplico per sette... che cosa?" Il numero del posto, no. Devo specificare che moltiplico 7 per un fattore dato dalla somma del numero del posto e 1.

3.C. (Amadei)

La prima legge trovata è secondo me la più semplice da vedere (e quella che anche io ho trovato).
... La seconda legge lo trovo più complessa ... ma sembrerebbe più semplice generalizzare ...
Mi sembra che venga tolta valenza alla prima ipotesi, che opportunamente studiata può essere anch'essa generalizzata.

Interpretazioni contrapposte

3.D.

La seconda legge non mette in luce la relazione fra i numeri della sequenza, si tratta semplicemente di rappresentazioni non canoniche dei numeri stessi della sequenza.
... Gli studenti si renderebbero conto che la seconda legge non permette di partire da 4 e arrivare agli altri numeri senza conoscerli, <u>mentre la prima sì</u>.

> *L'osservazione della prima frase è vera ma non tiene conto del fatto che in ognuna delle presentazioni compaiono termini e segni che si ripetono e un numero che cambia ogni volta (il secondo fattore della moltiplicazione). È proprio questa variazione che consente di passare da scritture "locali" alla scrittura generale.*
> *La seconda frase evidenzia la difficoltà di fondo di questa ricerca di regolarità; la legge ricorsiva sembra efficace, mentre invece funziona <u>soltanto</u> se si conosce il termine precedente. Si provi ad utilizzarla per rispondere alla domanda "Che numero si trova alla diciottesima posizione?"; bisogna ripartire dal 25 aggiungendo sette finché non si arriva al diciottesimo termine.*

3.E.

La seconda legge individua il legame tra il numero e il suo posto, ma non è evidente, nel senso che nella legge e esplicitata non compare la posizione occupata dal numero. Dovrebbe essere $7\times(p+1)-10=n$. Quindi la regolarità non e ancora evidente.

Quella che viene chiamata "seconda legge" in realtà non lo è ancora perché si tratta di rappresentazioni in forma non canonica dei termini della successione nei quali il secondo fattore della moltiplicazione cambia sempre. Non compare la posizione occupata dal numero per il fatto che questa conquista deve nascere proprio dall'esplorazione delle rappresentazioni. Esplicitando il fattore variabile in funzione del numero della posizione si può pervenire alla scrittura proposta dallo studente.

3.F. (Civolani)

La prima legge è quella che ho trovato anch'io, serve per trovare di volta in volta il successivo numero della successione, in linguaggio algebrico si può esprimere come: $a_n=4+7n$. ... La seconda è molto più complessa e mi stupisco che alunni di prima media siano riusciti a trovarla (io non ci sono riuscito ma credo che ci siano giunti più per tentativi ed intuizioni che per comprensione reale della legge.

1) In quella che gli alunni hanno chiamato "legge 1" in realtà è stata individuata semplicemente la ragione della progressione. Questo punto di vista (ricorsivo) permette di individuare un termine solo se si conosce il suo precedente..

2) La seconda non è ancora una legge; alcuni alunni hanno individuato delle relazioni e le hanno esplicitate. La legge emerge facendo evolvere le scritture proposte dagli alunni.

3.G.

La seconda legge porta invece un risultato corretto, ed anche di calcolo immediato, ma il legame con la posizione del numero nella sequenza resta opaco e latente. Infatti occorre moltiplicare il 7 per la posizione del numero successivo a quello considerato e poi sottrarre 10.

Un punto di vista interessante

3.H.

... 10 può essere visto come 7+3...

Questa rappresentazione non canonica di 10 conduce alla comprensione dell'equivalenza fra due scritture frequenti in molte prove, per esempio:7×3-10 e 7×2-3 e consente una lettura della differenza di significato dei fattori per i quali sono moltiplicati i 7.

$$\mathbf{7\times3-10}=7\times3-(7+3)=7\times3-7-3=7\times3-7\times1-3=\mathbf{7\times2-3}$$

7×0 e 7×1

3.I.

La legge 2 inoltre presenta una piccola ambiguità dal momento che non consente di utilizzare 7×0 e 7×1, quindi potrebbe presentare un ostacolo per la generalizzazione.

Questione 4
Un commento di uno dei tutor al diario dell'attività fa notare all'insegnante che non ha favorito negli alunni la comprensione che le due leggi, così come sono state esplicitate, non sono confrontabili. Argomentate attorno a questa non-confrontabilità e formulate delle ipotesi sui modi nei quali l'insegnante potrebbe condurre gli alunni a rappresentazioni che consentano una loro equiparazione.

Non si parla di "scrittura sottrattiva", ma di "struttura additiva" specificando che è in gioco l'operazione inversa.

Risposte 'aritmetiche'

4.A.
Molto probabilmente nella prima legge non e difficile notare come, proponendo un caso non noto come, per esempio, "che numero mettereste in posizione 50". Una legge come la (1) non permette di risalire al numero richiesto mentre la (2) permette di individuare i numero 7×(50+1)-10=347.

Verso la generalizzazione'

4.B.
... I ragazzi vedono nella prima ipotesi l'aggiunta costante di un numero ad un altro numero, mentre nella seconda ipotesi il numero della sequenza è trovato attraverso un calcolo "complesso" ...
Secondo me per rendere le rappresentazioni e equiparabili bisogna operare sulla prima ipotesi in modo da rappresentare i numeri della sequenza con una rappresentazione diversa ... opererei in questo modo: generalizzerei la prima rappresentazione così:
4+7×0 4+7×1 4+7×2 4+7×3 4+7×4 ...
e poi confronterei questa scrittura con quella della seconda ipotesi:
7×2-10 7×3-10 7×4-10 7×5-10 7×6-10 ...

4.C.

$a_n=4+7n$

$a_n=7\times(n+2)-10$

Se nella prima formula si cerca un termine qualsiasi si vede che è errata:

$a_3=4+7\times3$ $a_3=4+21$ $a_3=25$ (25 è il quarto termine, non il terzo).

...

Suggerirei loro un'altra irregolarità:

4	11	18	25	32	39
0	1	2	3	4	5

Qualsiasi numero prendo (eccetto il 4) se gli sottraggo 4 (cioè il primo numero) e lo divido per la sua posizione ottengo sempre 7. Es. (32-4):4=7. ... 7 "numero magico".

4.D.

L'insegnante potrebbe chiedere ad esempio quale delle due leggi potrebbe aiutare di più a conoscere il numero alla quarantunesima posizione senza calcolare la quarantesima.

... Sono interessanti le rappresentazioni che "contengano" il numero di partenza o il numero della posizione, sui quali si possono fare molte argomentazioni. Ad esempio:

1	4	=1+3	=1+1×3	$=1+(1\times2-1)\times3$
2	11	=2+9	=2+3×3	$=2+(2\times2-1)\times3$
3	18	=3+15	=3+5×3	$=3+(3\times2-1)\times3$
4	25	=4+21	=4+7×3	$=4+(4\times2-1)\times3$
n	**p**		$\mathbf{=n+(n\times2-1)\times3}$	$\rightarrow$ $p=7n-3$

Scena terza
La prosecuzione dell'attività conduce ad una terza Legge:

Legge1: Bisogna aggiungere 7
Legge2: Moltiplico per 7 poi tolgo 10
Legge3: Moltiplico per 4, 5, 6, ecc. e poi aggiungo o sottraggo il numero che manca

Per favorire l'individuazione di una formula generale l'insegnante guida la classe verso la costruzione di una tabella.

Questione 5
Illustrate le potenzialità della tabella come impalcatura di supporto nella ricerca di regolarità.

Questione 6
Ipotizzate come impostereste la tabella.

Proviamo a rispondere: che numero si trova nella posizione 478?

1) Manca il numero della posizione, che è quello che consente la ricerca di relazioni fra i numeri della successione e quelli delle loro posizioni.

[*(Uno studente)* Per superare il conflitto tra numero ordinale e cardinale preferisco parlare di posto 1 e posto 2 e non di 1° e 2° posto]

Colonna critica *(efficace definizione di uno studente)*

p	*n*	*I legge*	*II legge*	*III legge*
1	*4*	$7\times0+4$	$7\times2-10$	$7\times4-24$
2	*11*	$7\times1+4$	$7\times3-10$	$7\times5-24$
3	*18*	$7\times2+4$	$7\times4-10$	$7\times6-24$
4	*25*	$7\times3+4$	$7\times5-10$	$7\times7-24$
5	*32*	$7\times4+4$	$7\times6-10$	$7\times8-24$

2) Bisogna rappresentare le relazioni in forma non canonica

p	*n*	*I legge*		*II legge*		*III legge*	
1	*4*	*7×0+4*	*7×(1-1)+4*	*7×2-10*	*7×(0+1)-10*	*7×4-24*	*7×(1+3)-24*
2	*11*	*7×1+4*	*7×(2-1)+4*	*7×3-10*	*7×(1+1)-10*	*7×5-24*	*7×(2+3)-24*
3	*18*	*7×2+4*	*7×(3-1)+4*	*7×4-10*	*7×(2+1)-10*	*7×6-24*	*7×(3+3)-24*
4	*25*	*7×3+4*	*7×(4-1)+4*	*7×5-10*	*7×(3+1)-10*	*7×7-24*	*7×(4+3)-24*
p	*?*	*7×4+4*	***7×(p-1)+4***	*7×6-10*	***7×(p+1)-10***	*7×8-24*	***7×(p+3)-24***

3) La scrittura finale deve porre in relazione le due variabili:

n=7×(p-1)+4 ***n=7×(p+1)-10*** ***n=7×(p+3)-24***

4) Le formule inverse (più adatte per la terza media) riconducono alla unicità della struttura:

n=7×(p-1)+4	*n=7×(p+1)-10*	*n=7×(p+3)-24*
n=7p-7+4	*n=7p+7-10*	*n=7p+21-24*
n=7p-3	*n=7p-3*	*n=7p-3*
(n+3)/7=p	***(n+3)/7=p***	***(n+3)/7=p***

La terza legge

6.A.

Perviene alla generalizzazione della terza legge

n° posizione	n° sequenza	3^a legge
1	4	(4×4)-12
2	11	(4×5)-9
3	18	(4×6)-6
4	25	(4×7)-3
5	32	(4×8)-0
6	39	(4×9)+3
n	4	**4×(n+3)+3×(n-5)**

In ogni tabella è fondamentale far capire agli studenti l'importanza dell'uso della forma non canoniche del numero, quindi è importante passare attraverso la verbalizzazione di ogni riga in modo tale da vedere passo dopo passo la regolarità esplicitata.

6.B.

Per la terza legge ammetto le mie difficoltà. Avrei bisogno di chiedere al ragazzo che l'ha espressa maggiori chiarimenti. L'utilizzo infatti dell''o', cioè aggiungo o sottraggo, le fa perdere a mio avviso il valore di legge, perde il significato. Quindi occorre far chiarire al ragazzo una sua legge eventualmente chiamandolo alla lavagna e chiedendo, dopo averla illustrata, di utilizzare la tabella per rappresentarla. A questo punto saranno i compagni stessi a vedere o confrontare le tabelle per selezionare quella più utile a individuare relazioni che consentano di definire con precisione il valore ad una determinata posizione.

6.C.

Io impostai lei la tabella come tabella della divisione con resto, per solo i numeri della successione; completandola è facile vedere che solo se il divisore è 7 il resto è costante (4) e il quoziente va da 0 a 4 senza 'buchi'.

:	4	11	18	25	32	39
4						
5						
6						
7	0 r 4	1 r 4	2 r 4	3 r 4	4 r 4	5 r 4

Scena quarta

Alla lavagna è stata costruita collettivamente la seguente tabella:

Posto	Numero	Operazioni	Ricetta matematica
11°	74		$4+7\times10$
31°	214		$4+7\times30$
n°			?

Insegnante «Domanda: il numero *n* vuol dire un numero in un posto qualsiasi, senza che vi dica che numero è, questo è il difficile! Che formula scrivo per il numero al posto ennesimo?»
Sergio «Cioè... secondo me non si può trovare perché ennesimo è un numero che non si sa... »
Andrea «Come ha detto lei, ennesimo indica... un numero in qualsiasi posto, quindi dico come Sergio, se il posto è indefinito, non potremo mai sapere che numero è!»
Insegnante «Esatto, sono d'accordo anch'io! Se non vi dico al 3°, al 4°, al 100°, al 7003° posto, non si può sapere... Ma se io, invece di dirvi il numero di posto, vi dico che è al posto *n*, posso fare un calcolo… posso scrivere una formula per trovare questo numero?»
Stefano «Secondo me sì... non sappiamo che numero è *n* e anche se non lo sappiamo possiamo trovare una formula».

Questione 7
Commentate gli interventi di Sergio e Andrea e i conflitti cognitivi che esprimono in relazione alle richieste dell'insegnante. Commentate le richieste dell'insegnante.

Alcuni hanno rilevato l'inopportunità del 'difficile'.

7.A.

... l'insegnante giustamente dà in parte ragione a Sergio e ad Andrea ma poi incespica su se stesso quando dice "Posso fare un calcolo..." correggendosi però subito.

Lo studente individua correttamente un momento nodale dell'attività. Riporto i commenti che, nel diario originale, proprio al suo intervento, fanno l'insegnante stesso autore del diario, il mentore e il ricercatore universitario:

(I) Capisco ora perché non riuscivano a rispondermi! Non ci intendiamo! Come ho detto all'inizio, il verbo "trovare" li mette fuori strada! Forse avrei dovuto dire "trovare una rappresentazione del numero di posto n che ci faccia capire che questo numero sta nella successione". Troppo complicato! Non so... Anch'io sono d'accordo sul rappresentare, *a maggior ragione se anche questo termine (Glossario) diventa una delle parole chiave del patrimonio culturale della classe, e quindi assume un significato* negoziato *e* condiviso *(ancora Glossario). Finalmente, brava! Rappresentare, è proprio il termine chiave.*

7.B.

Vorrei focalizzare l'attenzione sulla frase di Stefano "... non sappiamo che numero è n...". Ebbene secondo me è opportuno far notare che in realtà noi non sappiamo il valore particolare di n, ma nello stesso tempo n è qualsiasi numero naturale e quindi può avere infiniti valori: n può assumere le sembianze di qualunque numero naturale. Secondo me l'insegnante non dovrebbe parlare di 'calcolo' o di 'formula' ma piuttosto di 'legge' o 'relazione' in modo da attenzione analoghe sul processo.

7.C.

Poiché è stata già sofferta la ricerca della regolarità per valori noti, l'introduzione di una variabile spaventa ancora di più. È evidente che ancora i ragazzi non sono pronti per la generalizzazione della situazione problematica.

7.D.

Sergio e Andrea fanno fatica a vedere la lettera n come un numero generico, cioè non riescono ad associare a n l'idea di numero,... Questo perché vedono la ricetta matematica come una sequenza di operazioni da eseguire esclusivamente per giungere al risultato, cioè come un processo puramente aritmetico in cui devo fare delle operazioni: $4+7\times10=74$, $4+7\times30=214$. Dunque non riescono ancora ad individuare le regolarità contenute in queste formule.

7.E.

Il docente cerca di porre l'attenzione al fatto che si possa prevedere anche la posizione di numeri indefiniti e quindi non rappresentabili con delle cifre.

Quando usa il termine ‘qualsiasi’ o ‘ennesimo’ il docente della classe si riferisce al <u>*numero del posto*</u> *(e infatti parla di posto n) non ad un numero della successione.*

Dal diario originale:

<u>*Insegnante*</u>*: Più che 'qualsiasi', termine che si porta dietro il senso della variabilità, sarebbe stato più appropriato parlare di numero non specificato, 'indeterminato' (termine che concentrando l'attenzione sull'elemento lo fissa in qualche modo).*

<u>*Sergio*</u>*: Le parole 'numero che non si sa' conducono al concetto di* <u>*incognita*</u>*.*

<u>*Andrea*</u>*: Usa tre allocuzioni: 'Un numero in* <u>*qualsiasi*</u> *posto', '*<u>*indefinito*</u>*', 'non potremo mai sapere che numero è'. Le prime due fanno pensare al concetto legato al termine in disuso 'indeterminata' essendogli preferito 'variabile'. Il terzo comporta qualcosa che ha a che fare con la mancanza di informazioni, una* <u>*insufficienza di dati*</u>*. Quindi non è chiaro con cosa sia d'accordo l'insegnante.*

L'approccio alla **lettera** *è molto complesso, richiede tempi lunghi, strategie diverse, confronti, esplorazioni, comporta continue, impreviste,* **evaporazioni**. *La compresenza di intuizioni di significati diversi negli interventi di Sergio e Andrea è assolutamente inevitabile, direi fisiologica. Probabilmente la necessità (vera o presunta) di concludere la scheda e arrivare alla regola pone all'insegnante ritmi che difficilmente a mio avviso possono convivere con tale complessità. Siamo in pieno* **balbettio algebrico**, *e l'apprendimento del nuovo* **linguaggio**, *dei suoi significati e delle sue regole deve rispettare le esigenze della necessaria* decantazione.

Questione 8
L'insegnante di classe sta cercando di giungere ad una scrittura generale che contenga quindi anche delle lettere. Illustrate le principali difficoltà che alunni giovani possono incontrare nell'approccio alla lettera e quali strategie possono essere più produttive per favorirlo.

8.A.

... Quindi bisognerebbe utilizzare la legge ragionando però su numeri molto grandi e quindi non facilmente accessibili oppure su situazioni più complesse.

Se da un lato è vero che la legge mostra la sua potenza con numeri grandi, è vero però anche che le regolarità vanno individuate con numeri piccoli perché i calcoli sono più semplici. Quindi: l'esplorazione su numeri piccoli consente di passare alla generalizzazione che esprime la sua efficacia anche psicologica sui numeri grandi.

8.B.

La prima domanda dell'insegnante è molto sfidante, in quanto spiazza decisamente gli alunni che per la maggior parte, probabilmente, non l'hanno capita: "Cosa vuol dire posto ennesimo?"
Nella seconda domanda secondo me sbaglia nel dire: "Posso fare un calcolo..." Non devono fare nessun calcolo. Devono trovare una relazione! Devono trovare una relazione che leggi il numero di posto con la "ricetta matematica" per trovare il numero.

8.C.

Chiedendo ai ragazzi se riusciamo a trovare una formula saranno loro stessi a 'buttare' idee che contengano lettere. Cioè la necessità, a mio avviso, dell'introduzione della lettera deve venire dagli allievi e non dall'insegnante. Dovrebbe essere una scelta di 'comodità', di 'economia', <u>che credo sia intrinseca in molti di noi</u>.

8.D.

L'insegnante dovrebbe anche proporre agli studenti una legenda esplicativa per ogni utilizzo della lettera, abituandoli a riflettere sul significato della lettera stessa.

8.E.

La scelta dei numeri 11 e 31 potrebbe far cadere nell'errore che nella legge il 7 si è sempre moltiplicato per un multiplo di 10 (10, 30).

Scena quinta e ultima

Uno dei commenti invita l'insegnante a riflettere sull'opportunità di impostare la tabella in modo diverso e suggerisce questo esempio:

n. di posto	termine della successione	rappresentazione del termine della successione mediante il n. di posto
1	4	4+7×0
2	11	4+7×1
3	18	4+7×2
4	25	4+7×3

Questione 9

Confrontate la tabella elaborata dalla classe con quella suggerita nel commento e analizzate la sua efficacia per la conquista della generalizzazione. Ipotizzate come, partendo da questa tabella, potreste condurre l'attività, favorendo il riconoscimento di analogie fra le varie scritture, fino alla rappresentazione della successione in termini generali.

9.A.

... In questo caso porrei l'attenzione sul fatto che nella rappresentazione formulata e solo l'ultimo termine che cambia. Gli alunni si dovrebbero accorgere che ad esso si può sostituire l'intera successione dei naturali. Solo giunti a questo punto si può introdurre la lettera n per rappresentare un termine qualsiasi della successione.

9.B.

... emerge la prima cifra della successione (il 4), come un fardello che bisognerà portarsi dietro per sempre.

9.C.

Quest'ultima osservazione ('rappresentazione' invece di 'ricetta') è particolarmente significative perché supera le visione esclusivamente procedurale della legge (come invece indicato dalla 'ricetta matematica'), per evidenziare la visione relazionale e rappresentativa della legge.

... Per arrivare alla generalizzazione si può esprimere in linguaggio naturale la legge individuata: "Il termine della successione è dato dal numero del posto meno 1 preso 7 volte è aumentato di 4".

La proposta è didatticamente molto corretta perché sottolinea l'importanza dell'uso del linguaggio naturale come mediatore verso il linguaggio algebrico. Un'osservazione: invece è che "è dato" proporrei:

"Il termine della successione è uguale al numero del posto meno 1 preso 7 volte è aumentato di 4".

9.D.

In particolare la distribuzione verticale delle rappresentazioni prodotte mi sembra molto utile ed efficace (rispetto alla mia precedente proposta in cui erano disposte in orizzontale e molto più efficace) per visualizzare quelle che sono le analogie tra le varie rappresentazioni e portare i ragazzi alla tanto agognata generalizzazione.

9.E.

Di nuovo devo ammettere la mia perplessità... come si fa a chiedere di generalizzare quando la tabella è ambigua, non aiuta?... Mi riferisco alla tabella che c'era prima e a quella che c'è adesso. Prima l'avevano stesa gli alunni e l'insegnante non ha voluto interferire lasciando i ragazzi liberi di pensare e agire da soli? Quindi è intervenuto modificando quanto fatto dai ragazzi? Non mi è per niente chiaro l'ordine sequenziale di quanto è accaduto... Inoltre prima mi era richiesto un commento sulla generalizzazione, non sulla tabella... Chiedo scusa, sto svolgendo questo compito come un diario e non e certo questa la consegna.

Può darsi che questa non fosse la consegna iniziale, ma l'atteggiamento dello studente possiede a mio avviso un'elevata valenza a livello metacognitivo. Possiamo dire che la "soluzione" del problema proposto è comunque raggiungibile dallo studente con un po' di più pratica e con qualche supporto in più come stimolo ad una riflessione più produttiva.
Ma non reagirebbe forse positivamente un insegnante che trovasse un suo studente che dichiara in modo trasparente le sue difficoltà e le argomenta proponendo al docente stesso una rilettura positiva del contratto didattico?

6. La situazione didattica: contrari, perplessi, convinti

Riflessione conclusiva 10
Scrivete una breve riflessione sulla situazione didattica che vi è stato chiesto di commentare anche in base alla sua eventuale riproducibilità in una vostra classe.

L'attività proposta nelle schede costituisce l'estrema sintesi di un diario di classe. Sono state individuate delle scene che, pur estrapolate dal loro contesto, mantengono una loro significatività forte e possono costituire lo spunto per le riflessioni da parte dell'insegnante-studente. Situazioni 'reali' come Clotilde o gli alberi di Natale, fregi, successioni aritmetiche e altre situazioni problematiche analoghe vanno inserite in un percorso sviluppato lungo l'arco del triennio (sarebbero auspicabili delle premesse nella scuola primaria) inserito nella normale programmazione di classe, opportunamente cadenzato nella costruzione delle competenze, proiettato verso un uso consapevole della lettera e verso la generalizzazione della modellizzazione. Non va vista come una attività una tantum.

10.A.

Quello che non mi è assolutamente piaciuto in questa prova è la totale mancanza di un allacciamento al reale, al concreto, al quotidiano degli studenti. È importante secondo me che prove così impegnative vengano presentate agli studenti in maniera accattivante, possibilmente sotto forma di gioco o di sfida.
Inoltre secondo me la regolarità è troppo complessa ... se si impiega troppo tempo a scoprire è controproducente perché affatica gli studenti rischiando anche di demotivarli.

10.B.

D'altra parte trovo le situazione molto difficile da proporre ad una classe dove il livello non sia medio alto.

10.C.

Mi pare, comunque, che per una classe prima media sia un po' complesso giungere a scoprire il legame tra numero di posto e termine della successione perché questa relazione appare un poco nascosta.

9.F.

Ritengo che una situazione didattica come quella proposta sia utile ai fini dell'acquisizione di un pensiero algebrico ma che sia troppo complicate e legata da una situazione reale (a differenza degli alberi di Natale e dei biscotti di Clotilde) per poter essere proposta in classe. Confesso che risolvere la consegna nella prima scena è stato un compito difficile anche per me è ritengo che in una normale classe di scuola media ben pochi studenti sarebbero in grado di risolverla senza un mio aiuto diretto.

10.D.

Sicuramente una situazione didattica come quella proposta in questo compito è riproponibile in una classe a condizione che sia preceduta da un lungo percorso comprendente attività sull'uso delle rappresentazioni non canoniche di un numero, sulla molteplicità di rappresentazioni uno stesso numero, sull'analisi di regolarità più semplici da individuare, eventualmente anche da analisi di motivi e ripetute, nonché da attività che conducano alla conquista dell'uso delle lettere.

10.E.

Considerando che l'esperienza proposta, a differenza di altre che abbiamo affrontato durante il corso, esula da esperienze di vita quotidiana, ritengo che sia necessario e indispensabile proporla solo dopo averne fatte altre che sono simili ma più ancorate alla realtà; il rischio è che la soluzione dell'enigma appaia fine a se stessa... Concludendo, l'esperienza è riproducibile a condizione che sia preceduta da altre simili e più legate alla fisicità e alla dimensione del gioco.

10.F.

Tornando alla sua riproducibilità in una mia ipotetica classe direi che è fattibile e che soprattutto è adatta ad una classe di scuola media. Infatti pur trovando molto belle e divertenti le attività proposte nelle Unità ArAl, mi sembra più adatto far lavorare gli studenti di scuola media sulla ricerca di regolarità in ambiti numerici piuttosto che utilizzare fregi, disegni, eccetera.

10.G.

La situazione problematica proposta l'ho trovata estremamente stimolante perché offre diversi spunti di riflessione: non solo permette di parlare di successioni e generalizzazione ma anche di rappresentazione del numero, di confronto di scritture ed equivalenze fra scritture.

10.H.

La situazione didattica proposta mostra una situazione di partenza (la successione) molto semplice da analizzare. Questo è un vantaggio in quanto credo che iniziare a lavorare con successioni semplici abitui i ragazzi ad approcciarsi con più serenità ad un tale tipo di lavoro.

10.I.

È interessante notare come una situazione problematica, anche molto semplice, come quella proposta, possa dar luogo ad una così ampia serie di spunti sui quali far riflettere i ragazzi; è fondamentale però che l'insegnante sia istruito sul modo di operare e soprattutto che abbia ben chiaro l'obiettivo di quello che fa. Assolutamente fondamentale è saper porre le domande in maniera appropriata in modo che riescano a guidare i ragazzi e non a disorientarli. Penso che la situazione proposta sia facilmente presentabile in classe, senza apportare neanche molti aggiustamenti.

10.J.

La situazione che mi è stata proposta è apparentemente molto semplice (una successione con una legge ricorsiva "quasi banale") è all'inizio mi sembrava troppo semplice ("come? Solo una successione lineare?"). In realtà il problema si è rivelato molto ricco di contenuti e di spunti di riflessione, soprattutto relativamente alla problematica della ricerca di regolarità e quindi della generalizzazione delle leggi matematiche.

7. Riflessioni sulla struttura della prova

Riflessione conclusiva 11
Scrivete una breve riflessione conclusiva sulla struttura di questa prova in relazione soprattutto alla sua significatività come modello di compito che aiuti dei docenti in formazione ad esplorare ciò che hanno appreso sia a livello matematico che pedagogico.

Emerge in numerose prove l'invito a inserire analisi di diari di classe o prove simili a questa durante il corso o prima di intraprendere il tirocinio.

11.A.
... A mio parere prove di questo tipo andrebbero fatte <u>anche in itinere e non solo come prova finale</u>, anche se mi rendo conto che il tempo non lo permette.

11.B.
... Per favorire maggiormente la ‘messa in situazione’ suggerisco ... di <u>sottoporre ai docenti in formazione i protocolli originali degli alunni</u>; solo in tal modo gli insegnanti potranno confrontarsi con la vera creatività, la vera intuizione, il vero disordine e la conseguente grande capacità interpretativa che sarà loro attivamente richiesta alla "prova del fuoco".

11.C.
Confesso che la ricerca di regolarità mi ha permesso di scoprire una nuova visione delle situazioni problematiche; <u>prima, se vedevo una certa regolarità, questa rimaneva limitata al caso particolare e non generalizzavo</u>! Devo assolutamente curare questo aspetto ed esercitarmi altrimenti rischio di creare degli studenti statici.

11.D.
Il fatto che la prova sia strutturata in scene mi ha permesso di concentrarmi maggiormente sui singoli step, senza sapere ciò che veniva dopo. In questo modo ho potuto veramente buttare giù le prime impressioni, senza venire influenzata dalle informazioni successive. <u>È stato molto utile questo compito per esplorare ciò che ho preso a livello matematico, in quanto mi ha fatto rendere conto che ho veramente appreso qualcosa nel corso di questo corso</u>.

11.E.

Una prova strutturata in questo modo aiuta i futuri docenti a calarsi nei panni di una possibile situazione riscontrabile in classe; questo li aiuta nel prevedere possibili comportamenti ed eventuali risposte da dare o non dare ai ragazzi.... Inoltre il saper leggere 'tra le righe' quello che dicono i ragazzi è compito non da poco che va imparato anche tramite una formazione pedagogica.

11.F.

... Penso infatti che uno dei timori maggiori sia la possibilità di perdere il controllo della discussione e la possibilità di arrivare ad un punto morto. Avere la possibilità di iniziare lavori di questo tipo può sicuramente favorire la formazione degli insegnanti (anche di quelli già in servizio) ed una maggiore propensione all'uso di questa metodologia didattica.

11.G.

Personalmente la ricerca del legame (nella prima scena) mi ha richiesto qualche sforzo e non so neppure se sia corretto.

11.H.

La prima legge trovata è secondo me la più semplice da vedere (è quella che anche io ho trovato), ...

11.I.

È un compito complesso, che richiede di rivestire diversi ruoli: occorre cercare di immedesimarsi nei ragazzi e anche nel docente della classe. ... Ho fatto una fatica enorme a cercare di ricostruire cosa è successo e non credo ancora di averlo compreso del tutto. A volte mi chiedo se la SSIS non dovesse essere preceduta da un anno di osservazioni nelle diverse classi! Per quanto mi riguarda credo che questo tipo di compito sia valido come esercitazione, come simulazione di ciò che potrebbe accadere in classe e come tale potrebbe essere condotto durante il laboratorio. Ma ho paura di non aver compreso bene le consegne o di essere veramente entrata nella logica del compito e della classe. Il non aver trovato la giusta regola all'inizio mi ha disorientato per diverse scene. Ciò non mi permette di essere 'oggettiva' nella valutazione. Mi resta oscura la sua valenza dal punto di vista pedagogico, probabilmente per mie lacune. Mi chiedo: quale era lo scopo del compito? Del laboratorio? Io credevo dalle lezioni di aver capito

finalmente cos'è l'algebra, a cosa serve, come fare a renderla più accattivante per i ragazzi, a darle un senso, diversi modi per trattarla. E soprattutto l'importanza di trattarla precocemente e non relegarla alla fine della seconda o della terza media.
Durante il laboratorio abbiamo riflettuto sulle diverse difficoltà dei ragazzi, ma non mi è bastato. Ripeto: manca e esperienza e osservazione. Soprattutto devo ancora sedimentare queste novità e mi è difficile provare a entrare nella mentalità dei ragazzi. Forse mi sarebbe servito uno studio dei protocolli di diverse discussioni.

11.J.

... Questa prova l'ho ritenuta comunque più difficile rispetto alle altre che ci aveva fornito, quella dei savoiardi e degli alberi.

La questione nodale è: <u>quali competenze dovrebbero possedere gli alunni per affrontare questa attività?</u> <u>Quali competenze si ritiene che possiedano gli alunni della classe reale che ha fornito lo spunto per la prova?</u>